CIMAT

Examen General de Variable Compleja, Enero 2020

Cada problema correctamente resuelto vale 10 puntos. Se necesitan 45 puntos para aprobar el examen. Justifica todas tus respuestas.

1. Encontrar una función holomorfa y sobreyectiva $f : B(0,1) \to \mathbb{C} - \{0\}$.
2. Calcular
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 1} dx.$$
3. Probar que la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^z + n^2}$$
define una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con infinitos polos simples.
4. Sea C el cuadrado $C = \{-1\} \times [-1,1] \cup [-1,1] \times \{-1\} \cup \{1\} \times [-1,1] \cup [-1,1] \times \{1\}$. Sea f una función continua en $\mathbb{C}$ que es holomorfa en $\mathbb{C} - C$. Probar que f es una función entera.
5. Sea $f(z)$ una función continua pero no necesariamente analítica a lo largo de la curva simple cerrada γ. Define
$$F(z) = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$
y demuestra que $F(z)$ es holomorfa en el complemento de la curva γ.
6. Denota por $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas definidas en el disco unitario $D = \{z \mid |z| < 1\}$. Para $f \in \mathcal{F}$, denota por $f^{(n)}$ la n-ésima derivada de f. Si cada $f \in \mathcal{F}$ cumple $|f^{(n)}| \leq n!$ en todo D y para toda $n \geq 1$, demuestra que $\mathcal{F}$ es una familia normal.