Examen general de teoría de la medida

10 am, agosto 4, 2020

Se recomienda empezar con los ejercicios que se consideren más accesibles.
La duración es de 4 horas.
Cada ejercicio vale 10 puntos.

---

1. Sean (Ω, Σ) un espacio medible y $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$. Si para cualquier $q \in \mathbb{Q}$ el conjunto $\{x : f(x) > q\}$ es medible, prueba que la función f es medible.

2. Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y $\mathcal{L}^0(\Sigma, \mathbb{R})$ el espacio de funciones medibles $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Consideremos $f \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathbb{R})$ y $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^0(\Omega, \mathbb{R})$. Si $\mu(\Omega) < \infty$ y $f_n \to f$ c.t.p., prueba que $\{f_n\}$ converge a f en medida.

3. Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto con medida de Lebesgue cero, prueba que el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \in A\}$ tiene medida cero.

4. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Si μ es σ-finita, $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ es integrable y $\int_A f = 0$ para cualquier conjunto medible $A \subset \Omega$ con medida finita, prueba que $f = 0$ c.t.p.

5. Sean m la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ una función integrable. Prueba que la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) := \int_{(-\infty,x]} f(s)\, dm(s).$$

está bien definida y que es continua.

6. Sean m la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y μ una medida definida también en la σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Si μ coincide con m en los abiertos y μ es absolutamente continua respecto de m , prueba que $\mu = m$.

7. Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2}, \forall\, x > 0$. Si f es integrable en el intervalo $(0, 1)$, prueba que $a = 0 = b$.

8. Considera las funciones $f(u) = u\chi_{(0,1)}$ y $g(u) = u\chi_{(-1,0)},\ u \in \mathbb{R}$.
i) Verifica que f y g son integrables.
ii) Prueba que su convolución $f * g$ es una función acotada.