Examen General Algebra Moderna (18ALM01)

7 ago, 2020

Hay que responder 2 de los siguientes 3 problemas (si respondes más se considera tu mejores dos). Demostrar todos los incisos, o dar las definiciones que se pide, con precisión y claridad. Se puede usar teoremas, como el teorema fundamental de la teoría de Galois y la clasificación de grupos abelianos finitos, siempre y cuando los enuncies con precisión y demuestres que se cumplen las hipótesis.

1. *a*) Define: dominio integral.
   b) Demuestra: para todo campo F, el anillo $F[x]$ (los polinomios de 1 variable con coeficientes en F) es un dominio integral.
   c) Define: ideal e ideal maximal de un anillo.
   d) Demuestra: para todo dominio integral A e ideal $I \subset A$, A/I es un campo si y solo si I es maximal.
   e) Define: polinomio irreducible.
   f) Sea F un campo, $A = F[x]$, $f \in A$, $(f) = fA$ (el ideal generado por f en A). Demuestra: (f) es un ideal maximal si y solo si f es un polinomio irreducible.
   g) Usa los incisos anteriores para demostrar: dado un polinomio irreducible $f \in F[x]$, existe un campo $K \supset F$ y un elemento $\alpha \in K$ tal que $f(\alpha) = 0$. (Sugerencia: $K := F[x]/(f)$.)

2. *a*) Define: extensión finita de campos, su grado, extensión algebraica.
   b) Cierto o falso: toda extensión algebraica es finita.
   c) Demuestra: Si L/F, K/L son extensiones finitas entonces K/F también lo es, con grado que es el producto de los grados de L/F y K/L.
   d) Define: campo de descomposición de un polinomio con coeficientes en un campo.
   e) Sea $f(x) = x^4 - 4 \in \mathbb{Q}[x]$. Encuentra un campo de descomposición de f y determina su grado sobre $\mathbb{Q}$.
   f) Define: extensión de Galois, su grupo de Galois.
   g) Sea $K/\mathbb{Q}$ la extensión que encontraste en inciso $2e$. Demuestra que es una extensión de Galois y determina su grupo de Galois como un subgrupo del grupo de permutaciones de las raices de $f(x) = x^4 - 4$.
   h) Encuentra todos los subcampos de la extensión $K/\mathbb{Q}$ que encontraste en inciso $2e$.

3. *a*) Determina el número de clases de isomorfismos de grupos abelianos de orden 100.
   b) Determina los grupos isomorfos entre los siguientes:

   $$\mathbb{Z}_{100},\ \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10},\ \mathbb{Z}_{50} \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,$$
   $$\{z \in \mathbb{C} \,|\, z^{100} = 1\},\ \mathbb{Z}^*_{125},\ \mathbb{Z}^*_{101}, \mathbb{Z}^*_9,\ F^*_9,\ \mathbb{Z}_9,\ \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3.$$

   Nota: $\mathbb{Z}^*_n$ es el conjunto de los elementos con inversa multiplicativa en $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. F_q es el campo con q elementos. $F^*_q := F_q \setminus \{0\}$ es su grupo multiplicativo.