CIMAT

Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemáticas Básicas

Examen de Admisión 2020

Resolver cada problema con demostración.

1. Sea M una matriz de $n \times n$ con coeficientes reales y de rango $n-1$. Demuestra que se puede eliminar un renglón y una columna de M para obtener una matriz de $(n-1) \times (n-1)$ de rango exactamente $n-1$.

2. i) Sea $T : V_1 \to V_2$ una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo k, donde $\dim V_1 = \dim V_2$. Demuestre que $T(V_1) = V_2$ si y solo si T^{-1} existe. ii) Sea $V = C^\infty(\mathbb{R})$. Sea $T : V \to V$ definida por $T(v(t)) = v'(t)$. Demuestre que $T(V)$ es todo V pero que T^{-1} no existe. ¿Cuál es la diferencia con el inciso i)?

3. Sea $A = \{T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4 \mid T \text{ es transformacion lineal y } \nu(T) > 2\}$, donde $\nu(T) = \dim\ker(T)$. Demuestre que A no es subespacio de $L(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$.

4. Encontrar la forma canónica de Jordan de estas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Sean $0 < a < b$ y definamos $a_0 = a$, $b_0 = b$,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

Demuestre que $\{a_n\}$ es creciente, $\{b_n\}$ es decreciente y que convergen al mismo límite.

6. Sea P un polinomio en $\mathbb{R}$ de grado n con exactamente n raices reales distintas. Demuestre que P' tiene exactamente $n-1$ raices reales distintas.

7. Sea $M_{n\times n}$ el espacio vectorial de las matrices de $n \times n$ con coeficientes reales. Si $f : M_{n\times n} \to M_{n\times n}$ es la función $f(X) = X^2$, calcula la derivada de f.

8. Sea γ la circunferencia de radio 1 con centro en el origen, orientada en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Calcula:

$$\int_\gamma e^x \cos(y)dx - e^x \sin(y)dy$$

9. Encuentre la solución general de la ecuación

$$(2y + 3xy^2)dx + (x + 2x^2y)dy = 0.$$

10. Consideramos la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\,\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

- a) Encontrar la solución general $y = f(x)$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- b) Encontrar una solución con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. ¿Es única?