ANÁLISIS II: EXAMEN GENERAL

Julio 5, 2012

Cada ejercicio vale 10 puntos.
Para aprobar se necesitan 50 o más puntos.
Duración: 4 hrs.

Definición Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es *Borel-medible* si, para cada $s \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > s\}$ es un conjunto de Borel.

1. Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones Borel-medibles, prueba que $f \circ g$ también.

2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$. Si para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe $r > 0$ tal que $f = 0$ c.t.p. en la bola abierta con centro en x y radio r, prueba que $f = 0$ c.t.p.

3. Sea $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua. Dada una función (Lebesgue) integrable $f : [0,1] \to \mathbb{R}^*$, definamos $Tf(x) := \int_0^1 \frac{xy}{x^2+y^2} f(y)dy$. Prueba:
i) (3 puntos) Tf está bien definida. ii) (4 puntos) Tf es medible. iii) (3 puntos) Tf es integrable.

En todo lo que sigue, (Ω, Σ, μ) es siempre un espacio de medida.

Definición Dada una función medible $f : \Omega \to [0, \infty]$, su *función de distribución* es $\mu_f : [0, \infty) \to [0, \infty]$, definida por $\mu_f(s) := \mu\left(\{x \in \Omega : |f(x)| > s\}\right)$.

4. Sea $f_n, f : \Omega \to [0, \infty]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, y supongamos que cada f_n es medible. Si $f_n \uparrow f$, prueba que $\mu_{f_n} \uparrow \mu_f$.

5. Si $f_n, f : \Omega \to [0, \infty]$ son funciones integrables y $f_n \to f$ c.t.p., prueba:
i) (3 puntos) Si $\int_\Omega |f_n - f|\, dm \to 0$, entonces $\int_\Omega f_n dm \to \int_\Omega f dm$.
ii) (7 puntos) Si $\int_\mathbb{R} f_n dm \to \int_\mathbb{R} f dm$, entonces $\int_\Omega |f_n - f|\, dm \to 0$.

6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible. Si la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a una función f y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada, prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E h \circ f_n \, d\mu = \int_E h \circ f \, d\mu$$

para cada $E \subset \Omega$ de medida finita.

7. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función integrable. Dado $\varepsilon > 0$, prueba que existe $\delta > 0$ tal que $\int_E |f|\, d\mu < \varepsilon$, para todo conjunto medible $E \subset \Omega$ tal que $\mu(E) < \delta$.