CIMAT

Examen General de Variable Compleja, Julio 2019

Cada problema correctamente resuelto vale 10 puntos. Se necesitan 45 puntos para aprobar el examen. Justifica todas tus respuestas.

1. Si f es analítica en un abierto U y existe $z_0 \in U$ tal que
$$\mathrm{Re}(f(z_0)) \geq \mathrm{Re}(f(z))$$
para toda $z \in U$, demuestra que f es constante en una vecindad de z_0. ¿Es f necesariamente constante en todo U?

2. ¿Existe una función holomorfa del disco abierto unitario, $D(0,1)$, al plano complejo $\mathbb{C}$ que sea sobreyectiva? Dar un ejemplo o probar que no existe.

3. Define el domino $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < r, \arg(z) \in (0, \pi/2)\}$. Supón que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es analítica, acotada, que se puede extender como una función continua a $\tilde{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < r, \arg(z) \in [0, \pi/2]\}$ y que satisface $\mathrm{Im} f(z) = 0$ para $\arg(z) = 0, \pi/2$. Demuestra que f tiene una extensión analítica a todo el disco abierto $D(0,r)$ y su serie de potencias es de la forma
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}, \qquad \text{con } a_{2n} \in \mathbb{R}.$$

4. Sea $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y no constante. Probar que la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(z) - n^2}$$
define una función meromorfa en $D(0,1)$.

5. Determinar cuantos ceros tiene la función $P(z) = 2z^{71} - 25z^{51} + 71z^{11} - z^{-1} + z^{-2}$ en el anillo $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$.

6. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y acotado. Sea $f : U \to U$ una función holomorfa. Para cualquier entero positivo k sea $f^k = f \circ f \circ ... \circ f$ (k-veces).

   i) Probar que si z es un punto fijo de f y $|f'(z)| < 1$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si $w \in D(z, \varepsilon)$ entonces $\lim_{k \to \infty} f^k(w) = z$.

   ii) Probar que si f tiene al menos dos puntos fijos entonces para todo punto fijo z de f se tiene que $|f'(z)| \geq 1$.