CIMAT

Examen General de Variable Compleja, Enero 2021

Cada problema correctamente resuelto vale 10 puntos. Se necesitan 35 puntos para aprobar el examen. Justifica todas tus respuestas.

1. Encontrar una fórmula explícita de una función holomorfa y biyectiva $f : B(0,1) \to \mathbb{C} - [1, \infty)$.

2. Sea f una función holomorfa en un entorno abierto de 0 tal que $f(0) = 0$ y tal que existe una sucesión $z_k \to 0$, $z_k \neq 0$ tal que $f^{-1}(z_k)$ tiene exactamente dos elementos $z_{k,1}$ y $z_{k,2}$ con $z_{k,1}, z_{k,2} \to 0$. Probar que f tiene un cero de orden 2 en 0.

3. Probar que la serie

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{1/z} + e^n}$$

define una función meromorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$ con infinitos polos simples. Decidir si S se puede extender de manera continua a 0.

4. Sea D el cuadrado $D = \{z = x + iy \in \mathbf{C} : x, y \in [0,1]\}$. Sea F una función continua en D y holomorfa en el interior de D. Suponer que F no es constante y existe $r \in \mathbf{R}$ tal que si $z \in \partial D$ entonces $\|F(z)\| = r$. Probar que existe $z_0 \in D$ tal que $F(z_0) = 0$.

5. Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1} dx.$$