CIMAT

Examen General de Variable Compleja, Agosto 2020

Cada problema correctamente resuelto vale 10 puntos. El examen se considera aprobado con 35 puntos. Justifica todas tus respuestas.

1. Sea f una función entera y no constante. Probar que la imagen de f es densa en $\mathbb{C}$.

2. Demostrar que una transformación de Möbius f verifica que $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = S^1$ si y solo si f se puede expresar como
$$f(z) = \frac{az+b}{\bar{a}z+\bar{b}}.$$
para ciertos $a, b \in \mathbb{C} - \{0\}$.

3. Sea f una función continua en $\mathbb{C}$ que es holomorfa en $\mathbb{C} - S^1$. Probar que f es una función entera.

4. Encontrar una función meromorfa f en $\mathbb{C}$ tal que tenga polos exactamente en los puntos $\{z_n = n + \sqrt{n} : n \in \mathbf{N}$ es un entero positivo $\}$ y tal que
$$f(z) - \frac{1}{(z-z_n)^2} + \frac{1}{z-z_n},$$
tenga una singularidad removible en z_n.

5. Sea $K \subset \mathbb{C}$ un compacto y suponer que el complemento de K no es conexo. Probar que existe una función holomorfa en (un abierto que contiene a) K que no se puede aproximar uniformemente en K por funciones enteras.