Examen General de Álgebra, Lunes, 7 de enero 2019

Problema 1

Denota por D_n el grupo dihédrico de $2n$ elementos. Cuántos 2-subgrupos de Sylow tiene el grupo D_{2n} si n es impar.

Problema 2

Prueba que solo hay 2 clases de isomorfismo de grupos no abelianos de orden 8.

Problema 3

Demuestra que $\mathbb{Z}[i]/(i-2)$, el anillo que se obtiene de los enteros de Gauss $\mathbb{Z}[i]$ introduciendo la relación $i-2=0$, y $\mathbb{F}_5$, el anillo con cinco elementos, son isomorfos.

Problema 4

Sea K un cuerpo de característica distinta de 2. Sea $f \in \mathbb{K}[x]$ un polinomio cúbico separable e irreducible sobre K. Prueba el siguiente criterio:

- Si el discriminante de f es un cuadrado en K, entonces el grupo de Galois de f es A_3.
- Si el discriminente de f no es un cuadrado en K, entonces el grupo de Galois de f es S_3.

Problema 5

Considera el polinomio bicuadrático $x^4-4x^3-4x^2+8x-2 \in \mathbb{Q}[x]$ con soluciones

$$x_{1,3} = 1+\sqrt{2} \pm \sqrt{3+\sqrt{2}},$$
$$x_{2,4} = 1-\sqrt{2} \pm \sqrt{3-\sqrt{2}}.$$

Calcula el cuerpo de factorización del polinomio, su grupo de Galois y establece la correspondencia de Galois entre los 8 subcuerpos y subgrupos no triviales.

Pista:

$$\sqrt{2} = \frac{1}{4}(x_1-x_2+x_3-x_4),$$
$$\sqrt{3-\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(x_1-x_3),$$
$$\sqrt{3-\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(x_2-x_4),$$
$$\sqrt{7} = \frac{1}{4}(x_1-x_3)(x_2-x_4).$$