

Examen general de álgebra

Enero 2021

Dispone de 3 horas para resolver el examen.

Los ejercicios están dispuestos por temas, **no necesariamente por grado de dificultad**; si no puede con uno pase al siguiente.

1. Demuestre que si G es un grupo de orden pq^2 con $p < q$, entonces G tiene un q -subgrupo de Sylow normal.
2. Encuentre todos los grupos abelianos de orden 900, salvo isomorfismo.
3. Demuestre que para cualquier campo $K \neq 0$, un polinomio f es irreducible si y sólo si el ideal $K[x]/(f)$ es un campo.
4. Demuestre que si R es un dominio con unidad y R es de característica $n > 0$, entonces n es un número primo.
5. Dado el polinomio $f(x) = x^7 - 11 \in \mathbb{Q}[x]$
 - a) Encuentre su campo de descomposición L , así como el grado de la extensión $[L : \mathbb{Q}]$.
 - b) Demuestre que si $G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$, entonces G tiene un subgrupo normal H de orden 7 y encuentre el campo fijo L^H .
 - c) Demuestre que G tiene subgrupos normales S y T de sendos órdenes 14 y 21 y encuentre los campos fijos L^S y L^T .