CIMAT

Examen General de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Agosto 2020

Resuelve cinco problemas. Cada problema correctamente resuelto vale 10 puntos. El examen se considera aprobado con 35 puntos. Justifica todas tus respuestas.

1. Encuentra la solución general del siguiente sistema de ecuaciones
$$\dot{x} = Ax$$
donde $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Explica la relación de la transformada de Picard y el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales autónomas. Para la función $f(x) = x$ calcula las primeras tres iteradas comenzando con la constante x_0.

3. Demuestra que el flujo de la ecuación diferencial $\dot{x} = \cos(x)\sin^2(x)$ es completo.

4. Sea φ_t un flujo definido sobre $\mathbb{R}^n$ y sea $p \in \mathbb{R}^n$ un punto dado. Si $\omega(p)$ denota el conjunto ω-límite de p, demuestra que $\omega(p)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ y positivamente invariante, esto es, para cada $x \in \omega(p)$ y cada $T \in \mathbb{R}$, se cumple $\varphi_T(x) \in \omega(p)$.

5. Determina la estabilidad del origen en el sistema
$$\dot{x} = -y^3, \quad \dot{y} = x^3.$$

6. Usando el criterio de Dulac, demuestra que el sistema de ecuaciones
$$\dot{x} = -y + x(1 - 2x^2 - 3y^2), \qquad \dot{y} = x + y(1 - 2x^2 - 3y^2),$$
tiene un único ciclo límite en el anillo $\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1$.