

CIMAT

Examen General Ecuaciones Diferenciales, Enero 2021

Instrucciones

- El examen tiene una duración de 4 horas.
- Cada problema vale 10 puntos.
- Para recibir puntuación es necesario justificar las respuestas.

1. Encuentra la solución del sistema con condiciones iniciales x_0, y_0

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2y \\ \dot{y} &= x + 2y\end{aligned}$$

Haz un dibujo del retrato fase

2. Un punto se dice recurrente si x esta en el omega limite de x . Prueba que los únicos puntos recurrentes en un sistema gradiente son los puntos de equilibrio.
3. Para el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\sin x\end{aligned}$$

Calcule los puntos de equilibrio, determine su estabilidad, donde sea posible encuentre una función de Lyapunov, haga un dibujo del plano fase.

4. Explica la relación de la transformada de Picard y el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales autónomas. Para la función $f(x) = x$ calcula las primeras tres iteradas comenzando con la constante x_0 .

5. Considere el sistema

$$x' = -y + x + f(r)x$$

$$y' = x + y + f(r)y$$

Con $r^2 = x^2 + y^2$,

a) De condiciones suficientes sobre la función f para que el sistema tenga una órbita periódica.

b) De condiciones necesarias y suficientes para que el sistema tenga una única órbita periódica.

Sugerencia, calcule $\frac{dr^2}{dt}$