ANÁLISIS

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. (Convergencia de sucesiones)

   Dada una sucesión $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{C}$ sea $S_n := a_1 + \cdots + a_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

   i) Si la sucesión $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es convergente, prueba que la sucesión $\left\{\frac{S_n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ también es convergente.

   ii) Determina si la afirmación recíproca es cierta.

2. (Convergencia de sucesiones)

   i) Consideremos sucesiones $\{a_n\},\ \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Si $\{a_n\}$ es convergente y $\{b_n\}$ es acotada, prueba que

   $$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n. \tag{1}$$

   ii) Encuentra sucesiones $\{a_n\},\ \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ para las que no se cumpla (1).

3. (Series, continuidad, derivabilidad)

   i) Proporciona un ejemplo de una sucesión $\{a_n\} \subseteq [0, \infty)$ y una función $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ que sea continua en 0 y se cumpla que $f(0) = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ no converge.

   ii) Sea $\{a_n\} \subseteq [0, \infty)$ y $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que $f(0) = 0$. Si f es derivable en 0 y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ converge.

4. (Series, desigualdades)

   Sea $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$. Si $0 < p < r < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$, prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^r < \infty$.

5. (Continuidad, compacidad)

   i) Encuentra una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no preserve cerrados.

   ii) Si $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un polinomio, prueba que P preserva cerrados.

6. (Continuidad, compacidad, producto escalar)

   Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar en $\mathbb{R}^n$ y $\| \cdot \|$ la norma euclidiana correspondiente. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, definamos $f(x) := \sup\{\langle x, a \rangle : \|a\| \leq 1\}$. Determina si f es uniformemente continua.

7. (Matrices, desigualdad de Schwarz)

   Denotemos por $\mathcal{M}(m\times n)$ el espacio vectorial de las matrices (reales) de tamaño $m\times n$. Identificándolo con $\mathbb{R}^{mn}$, consideraremos en $\mathcal{M}(m\times n)$ la norma euclidiana correspondiente. Además, $\mathcal{M}(n) := \mathcal{M}(n\times n)$.

   Sean $A \in \mathcal{M}(m\times n)$, $B \in \mathcal{M}(n\times k)$ y $x \in \mathbb{R}^n (= \mathcal{M}(n\times 1))$. Prueba:
   i) $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.
   ii) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

8. (Conexidad)

   Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}^2$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. Si existen $p, q \in A$ tales que $f(p)f(q) < 0$, prueba que existe $a \in A$ tal que $f(a) = 0$.

9. (Topología de $\mathbb{R}^n$, funciones lineales)

   Si V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, prueba que V es conexo y cerrado.

10. (Límite de funciones, integral)

    Encuentra $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$.

11. (Convergencia uniforme)

    Prueba que la función $f(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x > 1$, es continua.

12. (Continuidad uniforme, integral de Riemann)

    Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y definamos $g(x) := \int_0^1 f(x, y)dy$, para toda $x \in \mathbb{R}$. Prueba que g es continua.

13. (Integral de Riemann, teorema de Fubini)

    Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos por $V(n)$ la medida de la bola $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$. Prueba que $V(n+2) = \frac{2\pi}{n+2}V(n),\ \forall\, n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, siendo $V(0) = 1$.

14. (Derivación, desigualdad del valor medio)

    Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y no vacío. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es de clase C^1, prueba que para conjunto compacto $K \subseteq \Omega$, existe una constante C_K tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq C_K\|x - y\|, \forall\, x, y \in \Omega$.

15. (Teorema de Baire)

    Prueba que el conjunto $A := \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1\}$ no se puede expresar como intersección numerable de conjuntos abiertos.

16. (Conjunto de Cantor, conjuntos de medida cero)

    Determina si el conjunto $\{x^2 : x \in K\}$, donde K es el conjunto de Cantor, tiene medida cero.

17. (Integral de Riemann e integral de Lebesgue)

    Encuentra funciones $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que f es Riemann-integrable, $f = g$ c.t.p. y g no es Riemann-integrable.

18. (Integral de Lebesgue y continuidad)

    Dada una función Lebesgue-integrable $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definamos $Vf(x) := \int_a^x f(t)dt, \ \forall\, x \in [0, \infty)$. Determina si Vf es continua.

19. (Medida e integral de Lebesgue) Considera la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\int_A f = 0$, para cualquier conjunto A de medida finita, prueba que $f = 0$ c.t.p.

20. (Medida de Lebesgue) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto medible. Si $0 < b < m(A)$, prueba que existe un conjunto medible $B \subseteq A$ tal que $m(B) = b$.

21. (Integral de Lebesgue, teorema de Fubini)

    Dado un conjunto (Lebesgue) medible $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, el *cono con base* en Ω es el conjunto $C := \{(1-t)(x, y, 0) + t(0, 0, 1) : (x; y) \in \Omega, 0 \leq t \leq 1\}$. Prueba que C es medible y calcula su medida (en $\mathbb{R}^3$) $m(C)$ en términos de (la medida en $\mathbb{R}^2$) $m(\Omega)$.

22. (Medida abstracta)

    Sea μ la medida de contar en $\mathbb{N}$ y consideremos $f, f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Prueba que $f_n \to f$ en medida si, y sólo si, $f_n \to f$ uniformemente.

FGF

Septiembre 26, 2019