Examen de Admisión al Doctorado en Matemáticas Básicas y Aplicadas, CIMAT

Junio 2019

Instrucciones

- El examen tiene una duración de 4 horas.
- Cada problema vale 10 puntos.
- Se recomienda comenzar resolviendo los ejercicios mas sencillos.
- Para recibir puntuación es necesario justificar las respuestas.

1. Sea A una matriz de 3×3 tal que sus valores propios son $0, \lambda_1, \lambda_2$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1.\lambda_2 \neq 0$. Supongamos que v_0, v_1, v_2 son vectores propios respectivos (no nulos).
   (a) Describe $Ker\, A$, $Im\, A$
   (b) Encuentra todas las soluciones a la ecuación $Ax = v_1 + v_2$
   (c) Explica si $Ax = v_0$ tiene solución.
2. Sea $f : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$ una función dada por $f(x) = x + g(x)$, donde $\|g(x)\| \leq K\|x\|^2$ y f es de clase C^1. Prueba que f es localmente invertible cerca de 0.
3. Consideremos números reales a_j, b_j tales que $a_j < b_j$, $j = 1, \dots, n$, $S = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ y $f, g : S \to \mathbf{R}$. Si f y g son (Riemann) integrables, $g \geq 0$ y f es continua, prueba que existe $c \in S$ tal que $\int_S fg = f(c) \int_S g$.
4. Encontrar la solución a la ecuación

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 2e^x.$$

tal que $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

5. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, $T : V \to V$ un endomorfismo lineal. Suponer que para un entero positivo n se tiene que $T^n = 0$ pero $T^{n-1} \neq 0$. Probar que existen subespacios vectoriales $V_1, ..., V_n \subset V$ tales que $V = V_1 \oplus ... \oplus V_n$, $V_i \neq \{0\}$ para todo i, $T(V_i) \subset V_{i-1}$ para todo $i = 2, ..., n$ y $T(V_1) = 0$.

6. Prueba que la función f dada por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}, \forall\, x > 0$, está bien definida y es continua.

7. Sea $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ la matriz triangular superior con $A_{ii} = i/(n+1)$, $A_{ij} = n$ si $j > i$. Probar que $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$.

8. Sea $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ Lipschitz y $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua. Demuestra que el sistema

$$\tfrac{dx}{dt} = g(y)$$

$$\tfrac{dy}{dt} = f(t)x$$

tiene exactamente una solución en cuaquier intervalo acotado para un problema de valores iniciales dado.

9. Encuentra todas las funciones continuas no negativas f en $0 \leq t \leq 1$ tal que

$$f(t) \leq \int_0^t f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{1}$$