Examen de Admisión al Doctorado en Matemáticas Básicas, CIMAT

Enero 2020

Instrucciones

- El examen tiene una duración de 4 horas.
- Cada problema vale 10 puntos.
- Se recomienda comenzar resolviendo los ejercicios mas sencillos.
- Para recibir puntuación es necesario justificar las respuestas.

1. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funcion de clase C^3 y llamar $a_n = f(\frac{1}{\sqrt{n}})$. Probar que la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y solo si $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$.

2. Encontrar una matriz $A \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ tal que para todo $1 \leq i, j \leq 3$ se tiene que $A_{ij} \neq 0$ y $A^2 = 0$.

3. Sea $f : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$ una función dada por $f(x) = x + g(x)$, donde $g : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$ es de clase C^1. Asumir que $\forall\ v \in \mathbf{R^n}$ se tiene que $\|D_0(g)(v)\| < 1$. Prueba que f es localmente invertible cerca de 0.

4. Calcular el volumen del subconjunto $S \subset \mathbf{R}^3$ dado por

$$S = \{t_1(1,0,0) + t_2(1,1,0) + t_3(1,1,1) : t_1, t_2, t_3 \in [0,1]\}.$$

5. Encontrar la solución a la ecuación

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^{3x}.$$

tal que $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

6. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, $T : V \to V$ un endomorfismo lineal. Suponer que $T^3 = 0$ pero $T^2 \neq 0$. Probar que existen subespacios vectoriales $V_1, V_2, V_3 \subset V$ tales que $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$, $V_i \neq \{0\}$ para todo i, $T(V_3) \subset V_2$, $T(V_2) \subset T(V_1)$ y $T(V_1) = 0$.

7. Sea $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica tal que $\forall x \in \mathbf{S}^{n-1}$ se tiene que $\langle Ax, x\rangle < 1$. Probar que $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$.

8. Sea $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ Lipschitz y $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua. Demuestra que el sistema

$$\tfrac{dx}{dt} = g(y)$$

$$\tfrac{dy}{dt} = f(t)x$$

tiene exactamente una solución en cuaquier intervalo acotado para un problema de valores iniciales dado.

9. Encuentra todas las funciones continuas no negativas f en $0 \leq t \leq 1$ tal que

$$f(t) \leq \int_0^t f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{1}$$