Examen de Admisión al Doctorado en Matemáticas Básicas, CIMAT

Junio 2020

Instrucciones

- El examen tiene una duración de 4 horas.
- Cada problema vale 10 puntos.
- Se recomienda comenzar resolviendo los ejercicios mas sencillos.
- Para recibir puntuación es necesario justificar las respuestas.

1. Sea V un espacio vectorial y $T : V \to V$ un operador lineal. Si $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V - \{0\}$ son vectores propios correspondientes a valores propios distintos λ_1, $\lambda_2, \ldots$, λ_k, de T, muestra que $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ son linealmente independientes.

2. Sea $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica tal que traza $(A^2) = 0$. Probar que $A = 0$.

3. Encuentra la solución a la ecuación

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^{3x}.$$

   tal que $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4. Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y $f, f_n : \Omega \to \mathbf{R}$ funciones medibles, para cada $n \in \mathbf{N}$. Supongamos que $f_n \to f$ en medida y $g_n \to g$ en medida. Prueba que $f_n + g_n \to f + g$ en medida.

5. i) Encuentra una función continua $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y un subconjunto cerrado $A \subset \mathbf{R}$ tales que $f(A)$ no es cerrado (en $\mathbf{R}$).

   ii) Si $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es un polinomio y $A \subset \mathbf{R}$ es cerrado, prueba que $P(A)$ es cerrado.

6. Sea G un grupo de orden 20. Demostrar que tiene un subgrupo normal de orden 5.

7. Analiza el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, determinando la solución, los puntos críticos y el tipo de los mismos.

$$\frac{dx}{dt} = x - 2y, \qquad \frac{dy}{dt} = -4x - y.$$

8. Sea $A : I \to L(\mathbf{R}^n)$ continua. Sea $\varphi : \mathbf{R}^n \times I \times I \to \mathbf{R}^n$ la función que satisface:
(i) $\varphi(\xi, \tau, \tau) = \xi$,
(ii) $\dot{\varphi}(\xi, \tau, t) = A(t)\varphi(\xi, \tau, t)$.
Demuestra:

   (a) Si $\psi(t)$ es solución de $\dot{x} = A(t)x$, entonces $\psi(t) = \varphi(\psi(\tau), \tau, t)$.
   (b) φ es lineal en la primer variable.

9. i) Si $f : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$ es de clase C^1, prueba que para cada conjunto compacto $K \subset \mathbf{R^n}$, existe un número real $C_K > 0$ de manera que $\|f(x) - f(y)\| \leq C_K\|x - y\|, \forall\, x, y \in K$

   ii) Prueba que lo señalado en i) también es válido cuando el dominio de f es cualquier conjunto abierto no-vacío $U \subset \mathbf{R^n}$ (y $K \subset U$).