CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Examen general

Teoría de la medida
Enero 2025

Instrucciones:

- El examen tiene una duración de 4 horas.
- Cada problema vale 20 puntos y el total del examen son 100 puntos.
- Se tomarán en cuenta los 5 problemas con mayores puntajes.
- Para recibir puntuación, es necesario justificar las respuestas (a partir del segundo problema).

1. Verdadero o falso (no requiere justificación):
   (1) La intersección de una sucesión de conjuntos medibles es medible.
   (2) Para un conjunto $\mathcal{F}$ de funciones medibles de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, se tiene que $f(x) := \sup_{\varphi\in\mathcal{F}} \varphi(x)$ es medible.
   (3) Para $E \in \mathrm{Borel}(\mathbb{R}^2)$, $E_x := \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in E\} \in \mathrm{Borel}(\mathbb{R})$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
   (4) La medida de contar es singular con respecto a la medida de Lebesgue.
   (5) El espacio $L^\infty(\mathbb{R})$ es completo.

2. Enuncia y esboza los pasos de la demostración de uno de los siguientes teoremas:
   (1) teorema de extensión de Carathéodory,
   (2) teorema de diferenciación de Lebesgue.

3. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito y $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$. Probar que la asignación $T_K : L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu)$ dada por

$$(T_K f)(x) = \int_X K(x, y)f(y)d\mu(y)$$

   es una transformación lineal $T_K : L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu)$ bien definida (es decir, efectivamente mapea $L^2(X, \mu)$ en sí mismo) que satisface $\|T_K f\|_2 \le \|K\|_2\|f\|_2$ para todo $f \in L^2(X, \mu)$.

4. Sea $E = [0, 1]^2$. Determina la existencia e igualdad de las integrales $\iint_E f dm^2$, $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)dxdy$ y $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)dydx$ para $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$.

5. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, y $\{f_k\}_{k\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles de X en $\mathbb{R}$:

   (1) Demuestra que $f_k \to 0$ en casi todo punto si y solo si para todo $\varepsilon > 0$

   $$\mu\left(\limsup_{k\to\infty}\{|f_k| > \varepsilon\}\right) = \mu\left(\left\{\limsup_{k\to\infty}|f_k| > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

   (2) Da la definición de la convergencia en medida y da un ejemplo que ilustre por qué no es equivalente a la convergencia en casi todo punto.

6. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $0 < p_0 < p < p_1$:

   (1) Demuestra que $L^{p_0} \cap L^{p_1} \subseteq L^p$.

   (2) Da un ejemplo de $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y $f \in L^p \setminus (L^{p_0} \cap L^{p_1})$.