



CIMAT

Centro de Investigación  
en Matemáticas, A.C.

## Examen General - Teoría de la Medida

Maestría en Matemáticas Básicas

Enero 2024

1. Considera un espacio de medida  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  y una colección de subconjuntos medibles  $\{E_k\}_{k \geq 1} \subset \mathcal{M}$  tal que todo punto de  $X$  está a lo más en  $p$  miembros de la colección. Prueba que

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) \leq p \mu \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right).$$

2. Sea  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida y sea  $\{E_k\}_{k \geq 1}$  una sucesión de conjuntos medibles tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty.$$

Dado

$$E := \{x \in X \mid x \in E_k \text{ para infinitos valores de } k\},$$

prueba que  $E$  es medible y  $\mu(E) = 0$ .

3. Prueba que  $f_n \rightarrow f$  en medida, si, y solo si, para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon \text{ para } n > N.$$

4. Determina el siguiente límite y justifica el cálculo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n} dx.$$

5. Dado que  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ , determina la siguiente integral y justifica el cálculo

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2 + (x-y)^2 + y^2)} dx dy.$$

6. Dado  $t > 0$ , considera  $P_t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$P_t(x) := \frac{Ct}{(t^2 + |x|^2)^{3/2}}, \quad C := \left( 2\pi \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(1 + \rho^2)^{3/2}} \right)^{-1}.$$

Demuestra que si  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$  entonces  $P_t * f$  converge puntualmente a  $f$  cuando  $t \rightarrow 0^+$  en todo punto de Lebesgue de  $f$ .

7. Sean  $\mu, \nu$  medidas finitas definidas en  $(X, \mathcal{M})$ . Demuestra la equivalencia de las siguientes aseveraciones:

i) Para cada  $E \in \mathcal{M}$  tal que  $\mu(E) = 0$  se tiene que  $\nu(E) = 0$ .

ii) Para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $E \in \mathcal{M}$  satisface  $\mu(E) < \delta$ , entonces se tiene que  $\nu(E) < \varepsilon$ .

8. Demuestra que si  $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^d) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$  para alguna pareja  $0 < p_0 < p_1 < \infty$ , entonces  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  para todo  $p \in (p_0, p_1)$  y

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^d)}^{1-\theta} \|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^d)}^\theta$$

donde  $\theta \in (0, 1)$  es tal que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$