Examen General de Teoría de la Medida

7 de agosto de 2025

Resuelva por lo menos 5 de los siguientes problemas siguiendo cuidadosamente las instrucciones. En caso de resolver más de 5 problemas, se considerarán solamente los 5 de mayor puntaje.

1. Para cada uno de los siguientes enunciados indique si es verdadero o falso.

   a) En todo espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, si $(E_j)_{j=1}^{+\infty} \subset \mathcal{M}$ es una sucesión decreciente, entonces $\mu\left(\bigcap_{j=1}^{+\infty} E_j\right) = \lim_{j\to+\infty} \mu(E_j)$.

   b) Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función creciente continua por la derecha, entonces existe una única medida de Borel μ en $\mathbb{R}$ tal que $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$.

   c) Si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida con signo tal que $\mu(\mathcal{M}) \subset (-\infty, +\infty)$, es decir $\mu(A)$ es un número real para todo $A \in \mathcal{M}$, entonces $\mu(\mathcal{M})$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.

   d) Para todo espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y para cualesquiera $1 < p, q < +\infty$ tales que $1/p+1/q = 1$, el espacio de Banach $L^p(X, \mu)$ tiene espacio dual isométricamente isomorfo a $L^q(X, \mu)$.

2. Defina el conjunto de Cantor por

   $$C = \bigcap_{j=0}^{+\infty} C_j$$

   donde los conjuntos C_j se obtienen inductivamente de la siguiente forma.

   - $C_0 = [0, 1]$.
   - Con $C_j = \bigcup_k I_k$, unión finita de intervalos cerrados, el conjunto C_{j+1} se obtiene de C_j removiendo de cada intervalo I_k el tercio medio abierto, es decir, el intervalo centrado en I_k y de longitud un tercio de la longitud de I_k.

   Probar que C es un conjunto que satisface las siguientes propiedades.

   a) C tiene medida de Lebesgue 0.

   b) C es totalmente disconexo.

   c) C es compacto.

   d) C tiene la cardinalidad de $\mathbb{R}$.

3. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones medibles $X \to \mathbb{R}$, donde $(X, \mathcal{M})$ es un espacio medible. Probar que el conjunto de puntos

$$L = \{x \in X : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ existe en } \mathbb{R}\}$$

es un conjunto medible.

4. En un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, sea $f : X \to [0, +\infty]$ una función medible tal que

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Probar que $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$ es nulo y que $\{x \in X : f(x) > 0\}$ es σ-finito.

5. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida finita ($\mu(X) < +\infty$). Si $(f_n)_n \subset L^1(X, \mu)$ converge uniformemente a f, entonces $f \in L^1(X, \mu)$ y además se cumple

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

6. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida arbitrarios. Probar las siguientes afirmaciones para $f : X \to \mathbb{C}$ y $g : Y \to \mathbb{C}$ funciones dadas.

   a) Si f es $\mathcal{M}$-medible y g es $\mathcal{N}$-medible, entonces la función $h : X \times Y \to \mathbb{C}$ dada por $h(x, y) = f(x)g(y)$ es $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-medible.

   b) Si $f \in L^1(X, \mu)$ y $g \in L^1(Y, \nu)$, entonces la función h dada en el inciso anterior pertenece a $L^1(X \times Y, \mu \times \nu)$ y se cumple

$$\int_{X\times Y} h \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \left(\int_X f \, \mathrm{d}\mu\right)\left(\int_Y g \, \mathrm{d}\nu\right).$$

7. Probar que existe una única medida σ-finita con signo ν en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ($\mathcal{B}$ denota los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$) tal que

$$\nu((a, b)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n + 1)^2} \mathrm{m}((n, n + 1) \cap (a, b)) + \#((a, b) \cap \mathbb{Z}),$$

donde $\#(A)$ denota el número de elementos en un conjunto A. Para tal medida calcular la descomposición de Lebesgue respecto de la medida de Lebesgue m de $\mathbb{R}$, así como la derivada de Radon-Nikodym respecto de m de la parte absolutamente continua (respecto de m) de ν.