EXAMEN GENERAL DE ANALISIS I

Julio 2018

Instrucciones

- El examen tiene una duración de 4 horas.
- Cada problema vale 10 puntos.
- Para recibir puntuación es necesario justificar las respuestas.

Sea f un polinomio no constante tal que $f(0) = f(1)$. Prueba que f tiene un máximo o un mínimo local en el intervalo $(0, 1)$.

Si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces la sucesión misma converge.

Analizar la convergencia de las siguientes serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n^{-\alpha}), \alpha \in \mathbb{R}^+$

Sea $f(x, y) = (xy, y/x)$. Calcula $Df(x, y)$ con respecto a la base $(1, 0), (1, 1)$.

Sea $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$?

Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una funicón continua. Demuestra que f tiene un punto fijo.

Usa el Teorema de Taylor para probar la fórmula binomial,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n-k}$$

Prueba que las ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 = 0 \end{aligned}$$

determinan funciones $u(x, y)$, $v(x, y)$ cerca de $(x, y) = (2, -1)$ tal que $u(2, -1) = 2$, $v(2, -1) = 1$. Calcula $\partial u/\partial x$.

Prueba que $|\mathbf{a}| = max\{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} : |\mathbf{x}| = 1\}$.

Sea $A \subset [a, b]$ un conjunto de medida cero en $\mathbb{R}$. Prueba que $[a, b] \setminus A$ no tiene medida cero.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y con volumen. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ continua, $f(x) \geq 0$, y $f(x_0) > 0$ para algun x_0. Prueba que $\int f > 0$.

Encuentra la fórmula del área de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq r^2$ con el Teorema de Cambio de Variable

Para que p es r^p integrable en $\mathbb{R}^3$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$?

Considera la integral

$$I(\rho) = \frac{1}{\rho}\int_{\partial B_\rho} uds.$$

Donde u es una función suave y B_ρ es el disco de radio ρ centrado en p. Encuentra el $lim_{\rho\downarrow 0} I(\rho)$

1. Supongamos que $\sum x_n$ converge en $\mathbb{R}^d$. Prueba que x_k converge a $(0, \ldots, 0)$.

2. Determina la convergencia o divergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n} x^n$$

3. Sea B un compacto en $\mathbb{R}^d$. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ una función continua. Prueba que $f(B)$ es cerrado.

4. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

   Prueba que f es diferenciable en 0. ¿Es f' continua en 0?

5. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función dada por $f(x) = x + g(x)$, donde $\|g(x)\| \leq K\|x\|^2$ y f es de clase C^1. Prueba que f es localmente invertible cerca de 0.

6. Prueba que el conjunto $\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ tienen medida cero como subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

7. Considera la sucesión $\{f_n\}$, $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $f_n(x) = n^3 x^n (1 - x)$. Prueba que $f_n(x)$ converge punto a punto a una función $f(x)$. Calcula $\int_0^1 f_n(x)dx$ y $\int_0^1 f(x)dx$. ¿Se tiene convergencia uniforme de f_n a f?

8. ¿Para que p es r^p integrable en el complemento de la bola unitaria en $\mathbb{R}^3$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$?