

**EXAMEN GENERAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES
ENERO 2019**

Instrucciones:

- El examen tiene una duración de 4 horas.
- Cada problema vale 20 puntos y el total del examen son 100 puntos (basta con resolver 5 problemas para recibir la calificación máxima).
- Para recibir puntuación es necesario justificar las respuestas.

1. Sea $f \in C(\mathbb{R})$. Verifique que

$$x(t) = \int_0^t f(s)e^{t-s} ds$$

es una solución particular de $x' = x + f(t)$.

2. Considere para $c \in \mathbb{R}$, la familia de curvas

$$x(t) = \frac{c}{t - c}.$$

Encuentre una ecuación diferencial independiente de c y que admita a la familia dada como soluciones.

3. Considere para m, γ, k , y F reales positivos la ecuación

$$mx'' + \gamma x' + kx = F \cos(\omega t).$$

Determine la frecuencia $\omega \geq 0$ para la cual la solución periódica tiene la mayor posible amplitud.

4. Calcule $M(t) = \exp(At)$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verifique que el resultado satisfe $M' = AM$ y $M(0) = I$.

5. Sean $h > 0$, $U \in C_c^2(\mathbb{R})$ (soporte compacto) y $x_0, v_{1/2} \in \mathbb{R}$ dados. Considere el método de Euler para la ecuación de Newton

$$v_{i+1/2} = v_{i-1/2} - hU'(x_i), \quad x_{i+1} = x_i + hv_{i+1/2}$$

donde aproximamos la energía total por

$$E_{i+1/2} = \frac{1}{2}v_{i+1/2}^2 + \frac{U(x_{i+1}) + U(x_i)}{2}.$$

Demuestre que aunque dicha energía no sea constante, satisface

$$E_{i+1/2} = E_{i-1/2} + \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^x U''(\xi) d\xi dx.$$

Deduzca que $|E_{i+1/2} - E_{i-1/2}| \leq Ch^2$ para una constante C independiente de i y h .

6. Considere el problema de valores iniciales para $f \in C(\mathbb{R})$

$$x' = f(x), \quad x(0) = 0.$$

La iteración de Picard asociada se define por

$$(T\varphi)(t) = \int_0^t f(\varphi(s))ds.$$

Demuestre que si $\varphi \in C(\mathbb{R})$ es un punto fijo de T entonces φ es necesariamente diferenciable y satisface el problema de valores iniciales.

7. Para cada uno de los siguientes sistemas determine (con justificación) si existe por lo menos una órbita periódica en el plano (excluyendo puntos fijos)

$$\begin{cases} x' = x + x^2 - 2xy + 3y^2 \\ y' = 3x^2 - 2xy + y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 1 + x^2 - 2xy + 3y^2 \\ y' = 3x^2 - 2xy + y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x - y - x^3 \\ y' = x + y - y^3 \end{cases}$$