**EXAMEN GENERAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES**
**JULIO 2019**

**Instrucciones:**

- El examen tiene una duración de 4 horas.
- Cada problema vale 20 puntos y el total del examen son 100 puntos (basta con resolver 5 problemas para recibir la calificación máxima).
- Para recibir puntución es necesario justificar las respuestas.

**1.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Verifique que

$$x(t) = \int_0^t f(s) \sin(t-s) ds$$

es una solución particular de $x'' + x = f(t)$.

**2.** Considere el problema de valor inicial

$$x' = 2x - 1 \qquad x(0) = 1$$

Dé una breve explicación sobre por qué la recurrencia

$$x_0 = 1 \qquad x_{n+1} = (2h+1)x_n - h$$

es una buena aproximación de $x(nh) \sim x_n$ cuando $h \to 0$ y determine una fórmula cerrada para el término general de la sucesión.

**3.** Determine una solución particular de

$$x'' + 4x = t \sin(2t)$$

**4.** Calcule $M(t) = \exp(At)$ para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Verifique que el resultado satisfe $M' = AM$ y $M(0) = I$ (la matriz identidad).

**5.** Encuentre los puntos de equilibrio y determine su estabilidad global del sistema

$$x' = 4x - 0.2x^2 - 0.4xy \qquad y' = -6y + 0.6xy \qquad x, y > 0$$

**6.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función suave (todas sus derivadas existen) tal que $|f(x)| \leq |x| + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que si $x : (0,1) \to \mathbb{R}$ integrable satisface la ecuación de punto fijo

$$x(t) = \int_0^t f(x(s)) ds \; \forall t \in (0,1)$$

entonces $x$ es necesariamente suave.

**7.** Escriba el siguiente sistema en coordenadas polares y determine si el origen es un centro, un foco estable, o un foco inestable

$$x' = y + xy^2 \qquad y' = x + y^3$$