PROBLEMAS DE PRÁCTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES

Métodos básicos

1. Calcular todas las curvas perpendiculares a las curvas dadas por
$$x^3 - 3xy^2 = C \text{ para todo } C \in \mathbb{R}.$$

2. Encontrar una curva C en $\mathbb{R}^2$, que pase por el punto $(3, 2)$, con la siguiente propiedad: Sea $L(x_0, y_0)$ el segmento de la línea tangente a C en (x_0, y_0) que se encuentra en el primer cuadrante. Entonces, cada punto (x_0, y_0) de C es el punto medio de $L(x_0, y_0)$.

3. Dado $f \in C(\mathbb{R})$, sea
$$y(t) = \int_0^t f(s) \sin(t - s) ds$$
Calcular las primeras dos derivadas de y y verificar que
$$y'' + y = f.$$

4. Resuelve el problema de valores iniciales
$$y' = z(y + z)^k, \qquad z' = y(y + z)^k, \qquad y(0) = 1, \qquad z(0) = 0.$$

Buen planteamiento de las soluciones

1. Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 y acotada. Demuestra que el flujo de la ecuación diferencial $x' = f(x)$ es completo.

2. Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se define $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(At) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que
$$\frac{d}{dt}\exp(At) = A\exp(At), \qquad \exp(A0) = I.$$
Demuestra que para una constante $c > 0$ que depende solamente de A
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|\exp(At)x\|}{\|x\|} \le e^{ct}.$$

3. Da un ejemplo de una función $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $f(0) = 0$, $f'(0) \leq 0$ pero que sin embargo se tenga que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista $x_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ para el cual se cumple que la solución del problema de valores iniciales

$$x' = f(x), \qquad x(0) = x_0,$$

   está definida en todo $\mathbb{R}$ y satisface que $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$.

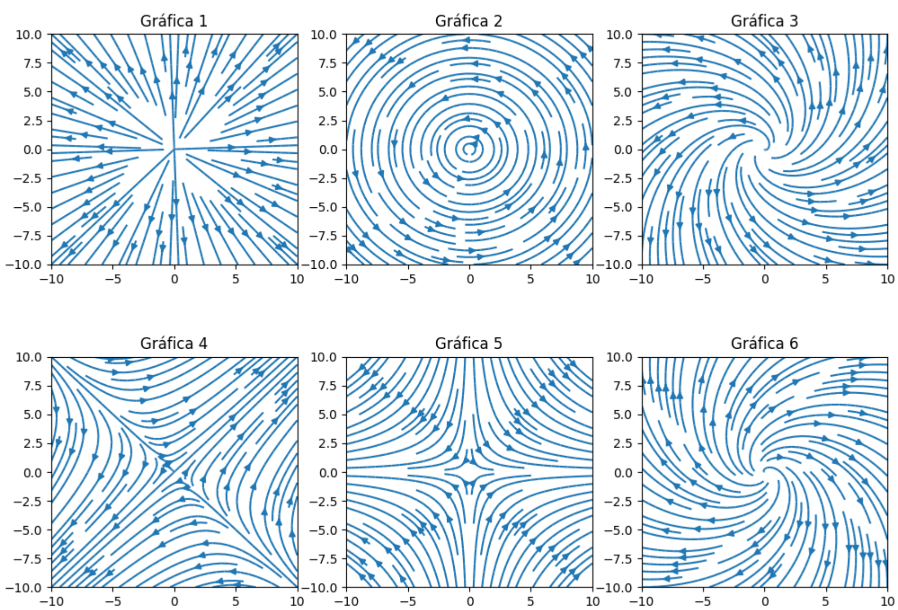
4. Sean $\varphi \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $A \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ suaves tales que

$$\frac{d}{dt}\varphi(x,t) = A(t)\varphi(x,t), \qquad \varphi(x,0) = x.$$

   Probar que para todo $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x,t)$ es una función lineal.

Problemas lineales

1. Presenta una expresión para un posible campo vectorial que genere cada uno de los siguientes flujos en el plano



2. Calcular $\exp(At)$ donde $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ está dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} -2 \text{ si } i = j, \\ 1 \text{ si } |i - j| = 1 \bmod n, \\ 0 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

3. Calcula las soluciones del sistema

$$x'' + x = 2y', \qquad y'' + y = -2x'$$

4. Determina el tipo de estabilidad del punto crítico $(0,0)$ y dibuja el retrato fase del sistema

$$x' = x + 2y, \qquad y' = -2x + 5y.$$

5. Encuentra todas las funciones $f \in C([0,1])$ no-negativas tales que para todo $t \in [0,1]$ se tiene que

$$f(t) \leq \int_0^t f(s)ds.$$

Estabilidad no lineal

1. Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$. Dada la ecuación diferencial de segundo orden $x'' = f(x)$, estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio de la ecuación determinando las condiciones sobre f para que dichos puntos sean estables o asintóticamente estables.

2. Sea $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Demuestra que las soluciones periódicas del flujo gradiente $x' = -\nabla u(x)$ son necesariamente las soluciones constantes.

3. Considera el sistema dinámico en coordenadas polares $r \geq 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$ mod 2π

$$r' = \begin{cases} r^2 \sin(1/r) \text{ si } r > 0, \\ 0 \text{ si } r = 0, \end{cases} \qquad r'(0) = 0, \qquad \theta' = 1.$$

Demuestra que tiene un equilibrio estable en el origen.

4. Considera el sistema

$$x' = y, \qquad y' = -x^5.$$

Construye una función de Lyapunov para determinar la estabilidad del origen.