**PROBLEMAS DE PREPARACIÓN PARA EL
ÉXAMEN DE ADMISIÓN AL DOCTORADO DE CIMAT
ÁLGEBRA**

Problem 1. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.

(i) Encuentra una base orthonormal para $W^\perp$.

(ii) Encuentra la proyección orthogonal de $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ en $W^\perp$.

Problem 2. Sea $A = \begin{pmatrix}1.4 & 0.4\\-0.8 & 0.2\end{pmatrix}$. Encuentra $\lim\limits_{n\to\infty} A^n \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Problem 3. Sea V un espacio vectorial real de dimension finita y sea $T : V \to V$ una transformación lineal con polinomio característico $p(x) = (x-5)^5(x-1)^3(x-2)^2$ y polinomio mínimo $m(x) = (x-5)^2(x-1)^2(x-2)$.

(i) Calcula $\det(T)$ y $\det(e^T)$.

(ii) Calcula todas las posibles formas canónicas de Jordan que la matriz asociada a T puede tener.

Problem 4. Sea V un espacio vectorial de dimension $n \geqslant 1$ sobre $\mathbb{R}$. Sea $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica no degenerada. Demuestra que los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) $f(v,v) \neq 0$ para todo $v \neq 0$.

(ii) f es o positiva definida o negativa definida.

Problem 5. Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ de dimensiones m y n respectivamente. Sean $T, S : V \to W$ transformaciones lineales con T suryectiva. Demuestra que $T + tS$ es suryectiva para todo $t \in \mathbb{C}$ excepto un numero finito de valores.

Problem 6. Sea $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial. Demuestra que $(W^\perp)^\perp = W$.

Problem 7. Sea V un espacio vectorial de dimension $n \geqslant 1$. Sean $T_1, \ldots, T_m : V \to V$ transformaciones lineales tal que

- $m \geqslant n$;
- $T_i \circ T_j = T_j \circ T_i$ para todos i, j.
- $T_1 \circ \ldots \circ T_m = 0$.

Demuestra que existen $i_1, \ldots, i_n$ tal que $T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_n} = 0$.

Problem 8. Sea $A = \begin{pmatrix}.7 & .3\\.3 & .7\end{pmatrix}$

(1) Encuentra D diagonal y P invertible tal que $A = P^{-1}AP$.

(2) Calcula A^{100} sin multiplicar A cien veces.

Problem 9. Sean A una matrix real de $n \times n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestra que $p_A(t) = (t-\lambda)^n$ si y solamente si $A - \lambda I$ es nilpotente.

Problem 10. Sea $V = \mathbb{R}^n$ Sea A una matriz simétrica de $n \times n$ tal que para cada valor propio λ tenemos $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

- Demuestra que la función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $T(v) = \lim\limits_{m\to\infty} A^m v$ existe.
- Demuestra que T es una transformación lineal (puedes asumir en inciso anterior aunque no lo hayas probado).
- Demuestra que T es la proyección othogonal sobre V_1 (el subespacio vectorial asociado a valor propio 1).

Problem 11. Sean A, B, C, D matrices cuadradas tal que AB^T y CD^T son simétricas y $AD^T - BC^T = I$. Demuestra que $A^T D - C^T B = I$.

Problem 12. Sean A y B dos matrices cuadradas tal que $A + B = AB$.Demuestra que $AB = BA$.

Problem 13. Existen polinomios $a(x), b(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $c(y), d(y) \in \mathbb{R}[y]$ tal que $1 + xy + x2y2 = a(x)c(y) + b(x)d(y)$?.

Problem 14. Demuestra que una matriz real de dos por dos es diagonalizable con una base ortogonal sólo sí es simtrica.

Problem 15. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo K. Sea T un endomorfismo de V. Demuestra que V se puede descomponer de forma unica como $V_0 \oplus V_1$ de tal manera que $T(V_0) \subseteq V_0$, $T(V_1) \subseteq V_1$, $T_{|V_0}$ es nilpotente y $T_{|V_1}$ es invertible.

Problem 16. Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ de dimensiones m y n respectivamente. Sean $T, S : V \to W$ transformaciones lineales con T suryectiva. Demuestra que $T + tS$ es suryectiva para todo $t \in \mathbb{C}$ excepto un numero finito de valores.

Problem 17. Denota por D_{2n} el grupo dihédrico de $2n$ elementos. Cuántos 2-subgrupos de Sylow tiene el grupo D_{2n} si n es impar.

Problem 18. Determina el centro

$$Z(D_{2n}) = \{\alpha \in D_{2n} : \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \text{ para todo } \beta \in D_{2n}\}$$

de D_{2n}.

Problem 19. Sean dos primos $p < q$ tales que $q \not\equiv 1 \mod p$. Sea G un grupo de orden pq. Prueba que G es cíclico.

Problem 20. Prueba que un grupo no conmutativo de orden $2q$, con q primo y distinto que 2, ha de ser isomorfo al grupo dihédrico D_{2q}.

Problem 21.
Sea p un número primo y sea G un grupo no abeliano de orden p^3. Prueba que $Z(G)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ y que $G/Z(G)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Problem 22. Prueba que solo hay 2 clases de isomorfismo de grupos no abelianos de orden 8.

Problem 23. Sea G un grupo de orden impar y sea N un subgrupo normal de orden 5. Prueba que N ha de estar contenido en el centro de G

Problem 24. La ecuación de clase de un grupo es $1 + 4 + 5 + 5 + 5$. ¿Tiene G un subgrupo de orden 4? De ser así, ¿es ese subgrupo normal? Responde las mismas preguntas acerca de subgrupos de orden 5.

Problem 25. Un elemento x de un anillo A se llama nilpotente si alguna potencia suya es cero. Prueba que si x es nilpotente, entonces $1 + x$ es una unidad.

Supongamos ahora que A tiene característica prima $p \neq 0$ y que a es nilpotente. Prueba que $1+a$ es unipotente (es decir, una potencia suya es 1).

Problem 26. Determina los automorfismos de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Determina el cuerpo fijo por el automorfismo $t \mapsto t + 1$ de $k(t)$.

Problem 27. Prueba que si el grupo de Galois del grupo de factorización de un polinomio cúbico es el grupo cíclico de 3 elementos, entonces las tres raíces del polinomio cúbico son reales.

Problem 28. Sea K un cuerpo de característica distinta de 2. Sea $f \in \mathbb{K}[x]$ un polinomio cúbico separable e irreducible sobre K. Prueba el siguiente criterio:

- Si el discriminante de f es un cuadrado en K, entonces el grupo de Galois de f es A_3.
- Si el discriminente de f no es un cuadrado en K, entonces el grupo de Galois de f es S_3.

Problem 29. Considera el polinomio bicuadrático $x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 8x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ con soluciones

$$x_{1,3} = 1 + \sqrt{2} \pm \sqrt{3 + \sqrt{2}},$$

$$x_{2,4} = 1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{3 - \sqrt{2}}.$$

Calcula el cuerpo de factorización del polinomio, su grupo de Galois y establece la correspondencia de Galois entre los 8 subcuerpos y subgrupos no triviales.