Problemas de práctica para exámen de admisión

Maestría en Ciencias con Orientación
en Matemáticas Básicas
CIMAT

1. Sea V un espacio formado por los polinomios con coeficientes reales que tienen grado menor o igual que 2. Define $T : V \to V$ por $TP = P'$, donde P' denota la derivada de P.

   (a) Determina una base para V.

   (b) Muestra que T es lineal y escribe su representación matricial con respecto a la base del paso anterior.

2. Sean A y B matrices de tamaños $m \times n$ y $n \times m$, respectivamente. Prueba que si $n < m$, entonces AB no es invertible.

3. Sean A y B matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en un campo K. Demuestra o da un contraejemplo del siguiente enunciado: si λ y μ son valores propios de las matrices A y B respectivamente, entonces $\lambda\mu$ es valor propio de AB.

4. ¿Existirán polinomios $a(x), b(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $c(y), d(y) \in \mathbb{R}[y]$ tales que $1 + xy + x^2y^2 = a(x)c(y)+b(x)d(y)$? Construye un ejemplo o prueba que no existen dichos polinomios.

5. Sean A y B dos matrices cuadradas tales que $A+B = AB$. Demuestra que $AB = BA$.

6. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo K. Sea T un endomorfismo de V. Demuestra que V se puede descomponer de forma única como V_0+V_1 de tal manera que $T(V_0) \subset V_0, T(V_1) \subset V1, T|V_0$ es nilpotente y $T|V_1$ es invertible.

7. Sean A, B, C, D matrices cuadradas tales que AB^T y CD^T son simétricas y $AD^T - BC^T = I$. Demuestra que $A^TD - C^TB = I$.

8. Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ de dimensiones m y n respectivamente. Sean $T, S : V \to W$ transformaciones lineales con T sobreyectiva. Demuestra que $T + \alpha S$ es sobreyectiva para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ excepto en un número finito de valores.

9. Inscribe un triángulo rectángulo de base b y altura h en una circunferencia de radio r. Si el centro del triángulo coincide con el de la circunferencia, calcula sus lados en función del radio r para que su área sea máxima. Calcula el área del triángulo.

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente y $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado.

    (a) Si f es continua, prueba que $f(\sup A) = \sup f(A)$.

    (b) Proporciona un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para la cual no se cumpla la igualdad en (b).

11. Sea $t > 0$.

    (a) Prueba que existe una única $x = x(t) > 0$ tal que $t = x \exp(x)$.

    (b) Denota por $x^* = x^*(t)$ la solución del inciso anterior. Prueba que cuando $t \to \infty$, se cumple $\frac{x^*(t)}{\log(t)} \to 1$.

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y, para cada $n \in \mathbb{N}$, define $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f_n(x) = f(x/n)$, $x \in \mathbb{R}$.

    (a) Encuentra $g = \lim_{n\to\infty} f_n$.

    (b) Muestra que la convergencia en el inciso anterior puede no ser uniforme. Justifica tu respuesta.

13. Sea $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ continua y acotada. Prueba que la gráfica de f,

    $$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2,$$

    no es un conjunto cerrado del plano real.

14. Sea $T \subset \mathbb{R}^3$ un tetraedro regular de lado a. Calcula $\mathrm{vol}(T)$.

15. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1. Supón que $DF_p \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{R}^2$. Supón además que F satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann: esto es $DF_p \circ J = J \circ DF_p$ para toda $p \in \mathbb{R}^2$, donde

    $$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

    Muestra que F tiene una inversa local de clase C^1 alrededor de cualquier punto $p \in \mathbb{R}^2$ y que dicha inversa también satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

16. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y $\{x_n\} \subset K$ una sucesión. Supón que existe $k \in K$ tal que si alguna subsucesión de $\{x_n\}$ converge, entonces converge a k. Prueba que $\{x_n\}$ converge a k.

17. Prueba el principio de Cavalieri: sean $A, B \subset \mathbb{R}^3$ compactos cuyo volumen está bien definido. Supón que las intersecciones de A y B con cualquier plano paralelo al plano xy tienen la misma área. Demuestra que $\text{vol}(A) = \text{vol}(B)$.

18. Encuentra la ecuación general de las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x = cy^4$.

19. Encuentra la curva plana S con la propiedad que la distancia del origen a cualquier línea tangente de S es igual a la coordenada x del punto de tangencia.

20. Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

    (a) $y' = c(a - y)(b - y)$.
    (b) $y' \sin(t) = 2(y + \cos(t))$.
    (c) $4x + e^t + (4t + \cos x)\frac{dx}{dt} = 0$.
    (d) $3y'' - 2y' + 4y = 0$, $y(2) = 1, y'(2) = -1$.
    (e) $9y'' + 6y' + y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$.
    (f) $y'' + 4y' + 4y = t^{5/2}e^{-2t}$, $y(0) = y'(0) = 0$.
    (g) $x'' + x = \cos(t)\cos(2t)$.

21. Demuestra que todas las soluciones de la ecuación diferencial

$$y' + \left(1 + \frac{2}{t(1 + t^2)}\right) y = 0$$

    son acotadas en $[0, \infty)$.

22. Determina la estabilidad del origen en $\mathbb{R}^2$ y dibuja el plano fase del sistema de ecuaciones $x' = Ax$, con $x \in \mathbb{R}^2$ para cada una de las matrices siguientes.

    (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
    (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
    (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
    (d) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

23. Resuelve el siguiente problema de valor inicial

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

24. Determina si la ecuación diferencial $3y + \cos x + 2y' = 0$ tiene alguna solución que sea acotada.

25. Encuentra dos soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

donde m y k son constantes. Explica por qué cualquier solución de la ecuación diferencial es una combinación lineal de las soluciones que encontraste.

26. Muestra que el problema de valores iniciales

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{x}, \qquad x(0) = 0,$$

no tiene soluciones y explica por qué.

27. Considera la ecuación diferencial de segundo orden

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

donde p y q son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$. Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son dos soluciones que se anulan en el mismo punto $x_0 \in \mathbb{R}$, explica por qué y_1 y y_2 no pueden generar todas las soluciones de la ecuación diferencial.

28. Calcula la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{y^2}{2} + 2ye^x + (y + e^x)y' = 0.$$

29. Encuentra una solución no trivial de la ecuación $y' = x\sqrt{1-y^2}$ con $y(0) = 1$ y distinta de la solución $y(t) = 1$. Explica por qué esto no contradice la unicidad de soluciones del problema de valor inicial $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$.

30. Supón que la ecuación $x' = ax^b, b > 1$, es un modelo poblacional propuesto para el crecimiento de cierta especie. Muestra que $x(t) \to \infty$ en tiempo finito, y por lo tanto, no es un modelo poblacional apropiado.

Última actualización: noviembre 2023