

Examen general de teoría de la medida

9 de agosto de 2023

Instrucciones

- El examen tiene una duración de 4 horas.
- Cada problema vale 10 puntos.
- Para recibir puntuación es necesario justificar las respuestas.

1. Sea $\mathcal{C}$ una clase monótona. Para $F \in \mathcal{C}$, prueba que la familia

$$\mathcal{C}(F) = \{A : A \setminus F, F \setminus A, A \cup F \in \mathcal{C}\}$$

es una clase monótona.

2. Sea μ^* una medida exterior en X . Prueba que A es μ^* -medible si, y sólo si

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2), \quad E_1 \subset A, E_2 \subset A^c.$$

3. ¿Cuál es la medida exterior de Lebesgue de los irracionales en el intervalo $[0, 1]$?
4. Supongamos que $f_n, g_n, f, g \in L^1$, $f_n \rightarrow f$ y $g_n \rightarrow g$ c.t.p. $|f_n| \leq g_n$ y $\int g_n \rightarrow \int g$. Entonces $\int f_n \rightarrow \int f$
5. Si $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ donde $p < \infty$, entonces $f_n \rightarrow f$ en medida. Por otra parte, si $f_n \rightarrow f$ en medida y $|f_n| \leq g \in L^p$ para toda n donde $p < \infty$, entonces $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.
6. Supongamos μ, ν son medidas finitas en $(X, \mathcal{M})$, con $\nu \ll \mu$, y sea $\lambda = \mu + \nu$. Si $f = d\nu/d\lambda$, entonces $0 \leq f < 1$ μ -c.t.p. y $d\nu/d\mu = f/(1 - f)$.
7. Sean $0 = \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_n \dots$ con $\delta_n \nearrow 1$. Sea g_n real y continua con soporte en (δ_n, δ_{n+1}) y $\int_0^1 g_n(t)dt = 1$. Definamos

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x))g_n(y).$$

Prueba que f es continua en $[0, 1) \times [0, 1)$. ¿Contradice esto al Teorema de Fubini? Justifica tu respuesta.

8. Sea $E = [0, 1] \times [0, 1]$. Verifica la existencia y la igualdad de las integrales iteradas y la integral doble:

(a) $f(x, y) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-2},$

(b) $f(x, y) = (1 - xy)^{-a}, (a > 0),$

(c) $f(x, y) = (x - \frac{1}{2})^{-3}$ si $0 < y < |x - \frac{1}{2}|, f(x, y) = 0$ de otra manera.