

# Examen General de Topología

Sinodales: Antonio Reiser, José Andrés Rodríguez Migueles,  
Jesús Rodríguez Viorato

Agosto 2025

Tienes 4 horas para resolver los siguientes problemas. Necesitas resolver al menos 7 correctamente para pasar. Justifica tus respuestas. ¡Éxito!

1. Sea  $X$  un espacio topológico y  $R$  una relación de equivalencia en  $X$ . Probar que si  $X/R$  es Hausdorff, entonces  $R \subseteq X \times X$  es un cerrado.
2. Muestre que si un espacio  $X$  se retrae por deformación a un punto  $x \in X$ , entonces para cada vecindad  $U$  de  $x$  existe una vecindad  $V \subset U$  de  $x$  tal que la función inclusión  $V \subset U$  es nullhomotópica.
3. Dado un par  $(X, A)$  que satisface la propiedad de extensión de homotopía y una equivalencia homotópica  $f : A \rightarrow B$ , muestre que el mapa natural  $X \rightarrow B \cup_f X$  es una equivalencia homotópica.
4. Para un espacio conexo por trayectorias  $X$ , muestre que  $\pi_1(X)$  es abeliano si y sólo si todos los homomorfismos de cambio de base  $\beta_h$  solo dependen de los puntos extremos de  $h$ .
5. Demuestre que  $\pi_1(X, x_0) = 0$  para todo punto  $x_0 \in X$  si sólo si toda función continua  $\mathbb{S}^1 \rightarrow X$  es homotópica a una función constante.
6. Calcula el grupo fundamental de  $\mathbb{RP}^n$  para todo  $n > 0$ .
7. Sean  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  dos espacios simplemente conexos que cubren dos espacios  $X$  e  $Y$  respectivamente, con  $X$  e  $Y$  arco-conexos y localmente arco-conexos. Muestre que si  $X$  e  $Y$  son homotópicamente equivalentes, entonces  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  también lo son.
8. Demuestra que si  $A \subset X$  es contraíble, entonces  $H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X)$  para toda  $n$ .
9. Calcula los grupos de homología de  $M \times \mathbb{S}^1$ ; el producto de la banda de Möbius con el círculo.
10. Demostrar que si  $M$  es una  $n$ -variedad conexa, entonces  $H_n(M, M - x) \cong \mathbb{Z}$ .
11. Demuestra que no existe una retracción  $r : X \rightarrow A$  donde  $X$  es la banda de Möbius y  $A$  su círculo frontera.