

# Examen General de Topología

Sinodales: Antonio Reiser, José Andrés Rodríguez Migueles,  
Jesús Rodríguez Viorato

Enero 2025

Tienes 4 horas para resolver los siguientes problemas. Necesitas resolver al menos 7 correctamente para pasar. Justifica tus respuestas. ¡Éxito!

1. Decimos que  $x, y \in X = \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$  son equivalentes si existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $x = \lambda y$ . Demuestra que  $X/\sim$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}^2$ .
2. Dado un par  $(X, A)$  que satisface la propiedad de extensión de homotopía y una equivalencia homotópica  $f : A \rightarrow B$ , muestre que el mapa natural  $X \rightarrow B \cup_f X$  es una equivalencia homotópica.
3. Sea  $X$  un espacio topológico conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias. Supongamos que  $\pi_1(X)$  es un grupo finito. Demostrar que todo mapeo  $f : X \rightarrow \mathbb{S}^1$  es homotópico a un mapeo constante.
4. Sea  $A$  un subconjunto finito de bolas abiertas disjuntas en  $\mathbb{S}^n$  con  $n > 1$ . Considera  $B$  el complemento de  $A$  en  $\mathbb{S}^n$ . Demostrar que  $\mathbb{S}^n/B$  es simplemente conexo.
5. Dado un espacio  $X$  y un subespacio  $A$  conexo por trayectorias conteniendo el punto base  $x_0$ , muestre que el morfismo  $\pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  inducido por la inclusión  $A \hookrightarrow X$  es sobreyectivo si y sólo si todo camino en  $X$  con extremos en  $A$  es homotópico a un camino en  $A$ .
6. Sean  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  dos espacios simplemente conexos que cubren dos espacios  $X$  e  $Y$  respectivamente, con  $X$  e  $Y$  arco-conexos y localmente arco-conexos. Muestre que si  $X$  e  $Y$  son homotópicamente equivalentes, entonces  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  también lo son.
7. Demuestra que si  $D : A_n \rightarrow B_{n+1}$  es una homotopía de cadenas entre los maps de cadenas  $f, g : A_n \rightarrow B_n$  (es decir  $f - g = \partial \circ D + D \circ \partial$ ) entonces  $f$  y  $g$  inducen la misma homología  $f_* = g_* : H_k(A_*) \rightarrow H_k(B_*)$ .
8. Calcular los grupos de homología de  $K \times \mathbb{S}^1$ ; el producto de la botella de Klein con el círculo.
9. Demostrar que si  $M$  es una  $n$ -variedad conexa, entonces  $H_n(M, M - x) \cong \mathbb{Z}$ .
10. Muestre que  $\tilde{H}_n(X) = \tilde{H}_{n+1}(SX)$ , donde  $SX$  denota la suspensión de  $X$ .