

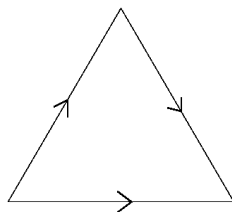
Examen General de Topología

Sinodales: Gabriela Guzmán, Araceli Guzmán, Jesús Rodríguez-Viorato

Enero 2024

Tienes 4 horas para resolver los siguientes problemas. Necesitas resolver al menos 7 correctamente para pasar. Justifica tus respuestas. ¡Éxito!

1. Demostrar que si Y es compacto, entonces la proyección $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ es una función cerrada.
2. Demostrar que si $p : M \rightarrow N$ es un cubriente con N Hausdorff, entonces M es Hausdorff.
3. Si $f : \mathbf{S}^1 \rightarrow X$ es un mapeo homotópico a un mapeo constante $ct : \mathbf{S}^1 \rightarrow X$. Demostrar que existe una extensión $\tilde{f} : \mathbf{D}^2 \rightarrow X$ de f ; es decir $\tilde{f}|_{\mathbf{S}^1} = f$.
4. Sea X un espacio topológico conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias. Supongamos que $\pi_1(X)$ es un grupo finito. Demostrar que todo mapeo $f : X \rightarrow \mathbf{S}^1$ es homotópico a un mapeo constante.
5. Sea A un subconjunto finito de bolas abiertas disjuntas en $\mathbf{S}^n$ con $n > 1$. Considera B el complemento de A en $\mathbf{S}^n$. Demostrar que $\mathbf{S}^n/B$ es simplemente conexo.
6. Calcular el grupo fundamental de el espacio proyectivo $\mathbf{RP}^2$.
7. En el contexto de la homología singular, demostrar que toda frontera es un ciclo.
8. El *Dunce Hat* es el espacio topológico X que se forma de tomar el 2-simplejo y hacer las identificaciones de sus aristas como se muestra en la figura. Calcular los grupos de homología de X .



9. Demostrar que si $A \subset X$ es contraíble, entonces $H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X)$ para toda n .

10. Demostrar que el disco n -dimensional $\mathbf{D}^n$ no se retrae a $\partial\mathbf{D}^n$.