

Instrucciones:

Tienes tres horas para contestar al menos 4 de las 7 preguntas. No se permiten celulares, ni tabletas, ni computadoras. Escribe tu respuesta a cada problema en páginas separadas. ¡Éxito!

Problema 1. Considera el disco $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y la relación de equivalencia dada por $(x, y) \sim (1, 0)$ para todo $(x, y) \in \partial\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$.

Demuestra que el espacio $\mathbb{D}/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Problema 2. Todo homeomorfismo del disco cerrado $\mathbb{D}^2$ en sí mismo, manda $\partial\mathbb{D}$ sobre $\partial\mathbb{D}$ y el interior del disco $\text{int}(\mathbb{D}^2) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ sobre sí mismo.

Problema 3. Sean A y B subconjuntos cerrados de un espacio X . Demuestra que si $A \cup B$ y $A \cap B$ son conexos, entonces A y B son conexos.

Problema 4. Demuestre que si Y es compacto, entonces la proyección $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ es una función cerrada.

Problema 5. Demuestra que $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo $\mathbb{R}^n$ para ninguna $n \neq 2$.

Problema 6. Calcula el grupo fundamental del toro 3-dimensional $S^1 \times S^1 \times S^1$.

Problema 7. Una función cubriente de M sobre N es una función continua $f : M \rightarrow N$ suprayectiva tal que para todo punto en $p \in N$ existe una vecindad U_p de p tal que $f^{-1}(U_p)$ se descompone como unión ajena de abiertos $\cup_\alpha V_\alpha$ tales que $f|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U_p$ es un homeomorfismo.

Demuestra que si $p : M \rightarrow N$ es un cubriente con N Hausdorff, entonces M es Hausdorff.