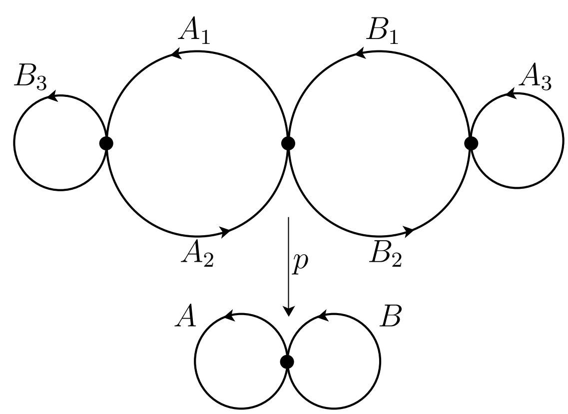
Examen General de Conocimientos de Topología, enero 2017.

Resuelve cinco de los siguientes problemas:

(1) Sea X un espacio. Un punto $a \in X$ se llama aislado si $a \in X - X'$, donde X' es el conjunto de puntos de acumulación. Un subconjunto se llama perfecto si es cerrado y no tiene puntos aislados. Demuestra que si $A \subset X$ no tiene puntos aislados, entonces A es perfecto.

(2) Demuestra que si Y es compacto, entonces la proyección $p_1 : X \times Y \to X$ es una función cerrada.

(3) Considera el mapeo $p : E \to X$ de la siguiente figura; p manda los arcos A_1 y A_2 alrededor de A, B_1 y B_2 alrededor de B. Además, p mapea A_3 y B_3 homemórficamente sobre A y B, respectivamente. Decide si p es regular.



(4) Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto numerable. Muestra que $\mathbb{R}^2 - S$ es conectable por trayectorias.

(5) Sea $X = S^1 \vee S^1$ y sea $f : X \to X$ un homeomorfismo. Escribimos

$$Y = \frac{X \times [0,1]}{(a,0) \sim (f(a),1)}.$$

Calcula $\pi_1(Y)$.

(6) Sea F una superficie conexa, cerrada y orientable. Calcula $\pi_1(F)$.