

CIMAT

Examen General de Variable Compleja

Agosto 2025

Cada uno de los problemas vale 10 puntos. Hay que juntar por lo menos 50 puntos, resolviendo por lo menos 1 problema de cada una de las 4 partes. Duración: 4 hrs. Justifica todas tus respuestas.

Parte A

Problema 1. Definir qué es una función holomorfa y qué es una función armónica. Demostrar que una función armónica es infinitamente diferenciable.

Problema 2. Sea f una función entera. Demostrar que f es un polinomio si y solo si para todo $z \in \mathbb{C}$, $f^{-1}(z)$ es un conjunto acotado.

Parte B

Problema 3. Calcular la integral de $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ sobre el círculo de radio 5 centrado en el origen recorrido en sentido antihorario.

Problema 4. Calcular la integral

$$\int_C \frac{|dz|}{|z - z_0|^2},$$

donde C es el círculo $|z| = 1$ y $|z_0| \neq 1$.

Parte C

Problema 5. Sea f_n una sucesión de funciones holomorfas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$. Asumir que converge a una función f uniformemente en subconjuntos compactos de U . Probar que f es holomorfa.

Problema 6. Sea f una función biholomorfa del disco en el disco tal que $f(0) = 0$. Probar que f es una rotación.

Parte D

Problema 7. Enunciar el Teorema del mapeo de Riemann y dar un bosquejo de su demostración.

Problema 8. Dar fórmulas explícitas para todos los biholomorfismos del semiplano $\{x + iy \in \mathbb{C} : x > 0\}$.