CIMAT

Examen General de Variable Compleja I

Agosto 2024

Cada problema correctamente resuelto vale 10 puntos. Se necesitan 35 puntos para aprobar el examen. Justifica todas tus respuestas.

Tiempo: 4 horas máximo.

1. Demuestra que no existe función holomorfa f definida en $\mathbb{C} - \{0\}$ tal que $e^{f(z)} = z$ para todo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

2. Calcula el número de ceros del polinomio $p(z) = 1 + 6z^3 + 3z^{10} + z^{11}$ en el anillo $1 < |z| < 2$.

3. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica tal que para todo $z \in \mathbb{C}$ cumple $f(2z) = (f(z))^2$. Supón que $f(\mathbb{R}) \subset (0, +\infty)$. Muestra que $f(z) = e^{cz}$ para algún $c \in \mathbb{R}$.

4. Sea f una función entera con ceros únicamente en los números enteros, esto es $f(n) = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. Demuestra que la función $f(z)/\sin(\pi z)$ tiene singularidades removibles.

5. Para valores $0 < r < R < +\infty$, considera el anillo abierto $r < |z - z_0| < R$ y una función holomorfa g definida en ese anillo con serie de Laurent $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Demuestra que para toda $r < \rho < R$ se cumple

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(z_0 + \rho e^{it})|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n}$$

6. Dada $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función holomorfa del disco unitario y $\gamma(t) : [0, 1] \to \mathbb{D}$ una curva suave, define la longitud hiperbólica de γ por

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt.$$

   Demuestra que $\ell(f \circ \gamma) \leq \ell(\gamma)$ y que la igualdad se cumple si y sólo si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.