CIMAT

Examen General de Variable Compleja I

Cada problema correctamente resuelto vale 10 puntos. Se necesitan 35 puntos para aprobar el examen. Justifica todas tus respuestas.

Tiempo: 4 horas máximo.

1. Sea $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera para la cual, existe una constante $M > 0$ que satisface $\mathrm{Im}(g(z)) < M$ para toda $z \in \mathbb{C}$. Demuestra que g es constante.

2. Para $z \in \mathbb{D}$ define $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$. Demuestra que para todo racional p/q se cumple $|f(re^{2\pi i p/q})| \to \infty$ cuando $r \nearrow 1$ y concluye que f no tiene extensión continua a través de $\partial\mathbb{D}$.

3. Demuestra que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

4. Sea f una función holomorfa en una vecindad abierta de $\overline{D(z_0, r)}, r > 0$. Demuestra que si f es holomorfa en el disco abierto $D(z_0, r)$ y constante en $\partial D(z_0, r)$, entonces f es constante.

5. Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ (abierto y conexo) y dada una función analítica $f : \Omega \to \Omega$, supón que existe una sucesión de enteros positivos $n_j \to \infty$ para la cual, la sucesión de iterados $f^{\circ n_j}$ converge uniformemente en compactos de Ω a la función identidad $\mathrm{id}|\Omega$. Demuestra que f es inyectiva.

6. Sea $\Omega = \{z \ : \ |z| > 1\}$ ¿Puede existir un biholomorfismo conforme entre Ω y $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?