EXAMEN GENERAL DE ÁLGEBRA
9 DE ENERO DE 2024

Este examen consta de seis ejercicios agrupados en tres partes y su duración es de 4 horas. Se recomienda comenzar por aquellos ejercicios que se consideren más accesibles.

NOTA: Se deben justificar todas las respuestas.

Teoría de grupos

Problema 1.
Sean S_n el grupo simétrico de grado n, D_n el grupo diedral de orden $2n$ y $Q_8 = \{\pm 1, \pm \mathrm{i}, \pm \mathrm{j}, \pm \mathrm{k}\}$ el grupo de cuaternios. Demostrar que:

(1) S_4 tiene un subgrupo isomorfo a D_4;
(2) S_n es un subgrupo de S_{n+1} para cada $n \in \mathbb{Z}_{>0}$;
(3) S_5 no tiene subgrupos cíclicos de orden 8;
(4) S_5 no tiene subgrupos isomorfos a Q_8.

Sugerencia: usar que el mapeo conjugación es un isomorfismo de grupos.

Problema 2. ¿Cierto o falso?

(1) Si G es un grupo tal que todos sus subgrupos propios son cíclicos ¿es G un grupo cíclico?
(2) Si G es un grupo tal que todos sus subgrupos son normales ¿es G un grupo abeliano?

Teoría de anillos

Problema 3. Sea A un anillo conmutativo con unidad y N el conjunto de sus elementos nilpotentes.

(1) Demostrar que N es un ideal de A y que además este es igual a la intersección de todos los ideales primos de A.
(2) Demostrar que el anillo cociente A/N no tiene elementos nilpotentes distintos de 0.

Problema 4. Demostrar que si A es un anillo noetheriano y $f : A \to A$ un epimorfismo de anillos, entonces f es inyectivo.
Sugerencia: considerar la cadena $\ker f \subset \ker f^2 \subset \cdots$.

Teoría de Galois

Problema 5. Sea $f(X) = X^3 + pX + q \in \mathbb{Q}[X]$ con raíces $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ en alguna extensión de $\mathbb{Q}$ y sea $\Delta(f) = (\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_3 - \alpha_1)^2 = -4p^3 - 27q^2$.

(1) Demostrar que el campo de descomposición $\mathbb{Q}_f$ de $f(x)$ es $\mathbb{Q}(\alpha_1, \sqrt{\Delta(f)})$.
(2) Demostrar que si $f(X)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ entonces $\#\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_f/\mathbb{Q}) \geqslant 3$.
(3) Demostrar que $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_f/\mathbb{Q})$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ si $\sqrt{\Delta(f)} \in \mathbb{Q}$ y a S_3 si $\sqrt{\Delta(f)} \notin \mathbb{Q}$.

Problema 6. Encontrar el campo de descomposición $\mathbb{Q}_f$ de los polinomios:

(1) $f(X) = X^3 - 4X + 6 \in \mathbb{Q}[X]$,
(2) $f(X) = X^3 - 7X + 6 \in \mathbb{Q}[X]$,
(3) $f(X) = X^3 - 21X - 28 \in \mathbb{Q}[X]$,

Además, en cada caso, calcular $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_f/\mathbb{Q})$ y encontrar todos los subcampos de $\mathbb{Q}_f$.