EXAMEN GENERAL DE ÁLGEBRA
13 DE ENERO DE 2023
10-14

Este examen tiene dos páginas y nueve ejercicios agrupados en tres partes. Los ejercicios de una misma parte no están necesariamente relacionados entre sí. Se deben justificar todos los pasos. Se recomienda comenzar por aquellos ejercicios que se consideren más accesibles.

1. Teoría de grupos

(a) Sea G un grupo finito que actúa sobre un conjunto finito X. Demuestra que se cumple
$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$$
donde X/G denota el conjunto de órbitas de la acción y X^g denota el conjunto de elementos de X que quedan fijos bajo la acción del elemento g.

(b) Demuestra que no hay grupos simples de orden 30.

(c) Expresa el conúcleo del homomorfismo $f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^3$ dado por $f(x, y) = (2x + 3y, 4x, 6x + 8y)$ como suma directa de grupos cíclicos.

2. Teoría de anillos

(a) Sea R un dominio entero y a, $b \in R$. Demuestra que si $(a)+(b)$ es un ideal principal, entonces también lo es $(a)\cap(b)$.

(b) Encuentra un ejemplo donde $(a)\cap(b)$ es principal, pero $(a)+(b)$ no es principal.

(c) Define dominio de factorización única y dominio de ideales principales. Da un ejemplo de un dominio de factorización única que no es un dominio de ideales principales.

3. Teoría de Galois

(a) Enuncia el teorema fundamental de la teoría de Galois.

(b) Determina el grupo de Galois de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{7}, \sqrt{35})/\mathbb{Q}$ salvo isomorfismo.

(c) Encuentra dos polinomios $f(x)$, $g(x) \in \mathbb{Z}[X]$ tales que sus grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}$ tienen la misma cardinalidad pero no son isomorfos.