Examen general de álgebra.

9 de agosto de 2024.

Este examen consta de 6 ejercicios agrupados en tres partes y tiene una duración de 4 horas. Los ejercicios de una misma parte no necesariamente están relacionados entre sí. Se recomienda comenzar por aquellos ejercicios que se consideren más accesibles.

Nota: Se deben justificar todos los pasos.

Teoría de grupos.

1. Demuestre que todo grupo de orden 34 tiene un subgrupo normal de orden 2 y un subgrupo normal de índice 2.
2. Demuestre que si G es un grupo de orden p^2q, con p y q primos distintos, entonces G no es simple.

Teoría de anillos.

1. Sea E un conjunto finito y sea $R = \mathcal{P}(E)$ el conjunto potencia de E.
   a) Demuestre que $(R, \Delta, \cap)$ es un anillo conmutativo. Aquí Δ denota la diferencia simétrica.
   b) Sea $E' \subseteq E$. Demuestre que $\mathcal{P}(E')$ es un ideal de R.
   c) Recíprocamente, demuestre que si $I \subset R$ es un ideal, entonces existe $E' \subset E$ tal que $I = \mathcal{P}(E')$.
   d) Demuestre que no todo ideal de R es de la forma $\mathcal{P}(E')$, para algún $E' \subset E$, si E es infinito.
2. a) Defina *dominio de ideales principales*.
   b) Demuestre que si K es un campo, entones $K[x]$ es un anillo de ideales principales.
   c) Demuestre que si K es un campo y $f(x) \in K[x]$ es irreducible, entonces $L := K[x]/(f(x))$ es un campo y que $f(t)$ tiene al menos una raíz en L.

Teoría de Galois.

1. a) Enuncie el *teorema fundamental de la teoría de Galois*.

   b) Sea L/K una extensión de Galois de grado n con grupo de Galois cíclico. Demuestre que, para cada divisor d de n, existe una única extensión de Galois E/K contenida en L de grado n/d.

2. Sea $f(x) = x^3 + px^2 + q \in \mathbb{Q}[x]$ irreducible con raíces $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ en alguna extensión finita de $\mathbb{Q}$ y sea $\Delta(f) = (\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_1 - \alpha_3)^2 = -4p^3 - 27q^2$.

   a) Demuestre que el campo de descomposición de f es
   $$\mathbb{Q}_f = \mathbb{Q}(\alpha_1, \sqrt{\Delta(f)}).$$

   b) Demuestre que si f es irreducible, entonces $|\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_f/\mathbb{Q})| \geq 3$.

   c) Demuestre que si $\sqrt{\Delta(f)} \in \mathbb{Q}$, entonces $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_f/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; en tanto que si $\sqrt{\Delta(f)} \notin \mathbb{Q}$, entonces $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_f/\mathbb{Q}) \cong S_3$.