# ÉXAMEN GENERAL DE ÁLGEBRA
# 7 DE AGOSTO DE 2023

Este examen consta de seis ejercicios agrupados en tres partes y su duración es de 4 horas. Se recomienda comenzar por aquellos ejercicios que se consideren más accesibles.

**NOTA:** Se deben justificar todas las respuestas.

## Teoría de grupos

**Problem 1.** Demuestra que todo subgrupo de un grupo abeliano es normal ¿Es cierto el recíproco?

**Problem 2.** Sean $p, q$ dos primos tales que $p < q$ y sea $G$ un grupo de orden $pq$.

(1) Si $q \not\equiv 1 \bmod p$, demuestra que $G$ es cíclico.
(2) Si $p, q$ son primos primos (es decir, $q = p + 4$) y $p \neq 3$, demuestra que $G$ es abeliano.

## Teoría de anillos

**Problem 3.** Un elemento $x$ de un anillo $A$ se llama nilpotente si alguna potencia suya es cero. Prueba que si $x$ es nilpotente, entonces $1 + x$ es una unidad. Supongamos ahora que $A$ tiene característica prima $p \neq 0$ y que $a$ es nilpotente. Prueba que $1 + a$ es unipotente (es decir, una potencia suya es 1).

**Problem 4.** Sea $A$ un anillo conmutativo con identidad ($1 \neq 0$) y sean $M$ y $P$ ideales de $A$. Prueba las siguiente afirmaciones:

(1) $M$ es un ideal maximal de $A$ si y solo si $A/M$ es un campo.
(2) $P$ es un ideal primo en $A$ si y solo si $A/P$ es un dominio entero.

Da un ejemplo de campo y otro de dominio entero como aplicaciones de los enunciados anteriores.

## Teoría de Galois

**Problem 5.** Encuentra el campo de descomposición de $f(x) = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ y calcula su grupo de Galois.

**Problem 6.** Sea $C_n$ el grupo cíclico de orden $n$.

(1) Demuestra que para cada primo $p$ existe una extension de Galois $K/\mathbb{Q}$ tal que $Gal(K/\mathbb{Q})$ es isomorfo a $C_{p-1}$.
(2) Demuestra que para cada entero positivo $n$ existe una extension de Galois $K/\mathbb{F}_p$ tal que $Gal(K/\mathbb{F}_p)$ es isomorfo a $C_n$.