

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

EXAMEN GENERAL

Instrucciones: Cada problema vale 10 puntos y es suficiente obtener 35 puntos para aprobar el general. Sus respuestas deben ser legibles y rigurosamente justificadas para obtener crédito.

1. Encuentra la familia de funciones $y \in C^1([0, \infty) \rightarrow [0, \infty))$ tal que para todo $x > 0$, la longitud de la gráfica de y en el intervalo $[0, x]$ y el área que esta encierra con el eje x en el mismo intervalo son iguales.

2. Considera el sistema en el plano \mathbb{R}^2 con coordenadas x e y

$$x' = xy + 12, \quad y' = x^2 + y^2 - 25$$

- Calcula y grafica sus curvas nulclínicas y puntos fijos.
- Grafica el campo vectorial.
- Determina la estabilidad de los puntos fijos.

3. El Teorema del Punto Fijo dice que para un espacio métrico completo (M, d) se tiene que si $T : M \rightarrow M$ es una contracción, entonces T tiene un único punto fijo. Da contraejemplos de la existencia del punto fijo en cada uno de los siguientes casos:

- M no es completo y $T : M \rightarrow M$ sigue siendo una contracción.
- M es completo y $T : M \rightarrow M$ es 1-Lipschitz, es decir

$$d(T(x), T(y)) \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in M$$

4. Sean $f, g \in C^0(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, y $x, y \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ soluciones respectivas de

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y' = g(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Demuestra que si

$$M := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)| < \infty \quad \text{y} \quad L := \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R} \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < \infty$$

entonces para todo $t \in \mathbb{R}$

$$|x(t) - y(t)| \leq (|x_0 - y_0| + M|t|)e^{L|t|}.$$

5. Sea $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n)$ el flujo generado por el campo $v \in C^1(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$, es decir

$$\partial_t \phi(x, t) = v(\phi(x, t)), \quad \phi(x, 0) = x.$$

Demuestra que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det D_x \phi(x, t) = \operatorname{div} v(x)$$