**PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS**

1. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Demuestra que el sistema

$$\dot{x} = g(x)$$

$$\dot{y} = f(x)y$$

tiene a lo más una solución en cualquier intervalo acotado.

2. Encuentra una función de Liapunov estricta para el equilibrio $(0,0)$ de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x - y^2 \\ \dot{y} &= -y - x^2 \end{aligned}.$$

Encuentra la bola más grande, centrada en cero, contenida en la cuenca de $(0.0)$.

3. Considera el siguiente sistema dinámico en coordenadas polares:

$$\dot{r} = \begin{cases} r^2 sen\,(1/r), & r > 0 \\ 0, & r = 0 \end{cases}.$$

$$\dot{\theta} = 1$$

Demuestra que tiene un equilibrio estable en el origen.

4. Sea $A : I \to L(\mathbb{R}^n)$ continua. Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \times I \times I \to \mathbb{R}^n$ la función que satisface:
(i) $\varphi(\xi, \tau, \tau) = \xi$,
(ii) $\dot{\varphi}(\xi, \tau, t) = A(t)\varphi(\xi, \tau, t)$.
Demuestra:

   (a) Si $\psi(t)$ es solución de $\dot{x} = A(t)x$, entonces $\psi(t) = \varphi(\psi(\tau), \tau, t)$.
   (b) $\varphi$ es lineal en la primer variable.

5. Calcula $e^{At}$ si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Determina el tipo de estabilidad del punto crítico $(0,0)$ y dibuja el retrato fase del sistema

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + 5x_2$$

7. Considera el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -x^5\end{aligned}$$

Construye una función de Liapunov para determinar la estabilidad de $(0,0)$.

8. Encuentra todas las funciones continuas no negativas $f$ en $0 \leq t \leq 1$ tal que

$$f(t) \leq \int_0^t f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$