1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 y supón que existe $M > 0$ tal que para toda $x \in \mathbb{R}^n$, $|f(x)| \leq M$. Demuestra que el flujo de la ecuación diferencial $x' = f(x)$ es completo.

2. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ con todos sus valores propios reales y distintos. Sea $t \mapsto \varphi(t, \bar{x}_0)$ la solución particular del problema de valor inicial

$$\bar{x}' = A\bar{x}, \bar{x}(0) = \bar{x}_0.$$

   Demuestra la continuidad de las soluciones con respecto a la condición inicial encontrando constantes $M \geq 0$ y $c \in \mathbb{R}$ tales que para cada t,

$$|\varphi(t, x_0) - \varphi(t, y_0)| \leq Me^{ct}|x_0 - y_0|.$$

3. Da un ejemplo de una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, clase C^1, no constante, tal que $f(0) = 0$, todos los valores propios de $Df(0)$ tienen parte real no positiva y para alguna solución $x(t)$ de $x' = f(x)$ con condición inicial en una vecindad del origen, se cumpla $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$.

4. Demuestra el siguiente resultado de inestabilidad.

   > Sea $\hat{x}$ un punto de equilibrio no lineal, $U = U(\hat{x}) \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $L : U \to \mathbb{R}$ una función clase C^1. Supón que $L(\hat{x}) = 0$ y $L'(x(t)) > 0$ en $U - \{\hat{x}\}$. Si $L(x_n) > 0$ para alguna sucesión $x_n \to \hat{x}$, entonces $\hat{x}$ es inestable.

5. Dada la ecuación diferencial de segundo orden

$$x'' - \varepsilon x' + g(x) = 0, \quad \varepsilon > 0,$$

   estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio de la ecuación determinando las condiciones sobre la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para que dichos puntos sean estables ó asintóticamente estables.

6. Demuestra que todo sistema gradiente con un mínimo aislado no puede tener trayectorias solución periódicas de período $T > 0$.