Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Examen General

CIMAT – Enero 2025

Cada problema correctamente resuelto vale 10 puntos. Se necesitan al menos 35 puntos puntos para aprobar el examen. Justifica claramente tus respuestas.

1. Sea A una matriz de coeficientes reales y tamaño 2×2. Demuestra o da un contraejemplo a los siguientes enunciados sobre las soluciones del sistema $\dot{x} = Ax$.
   (a) Si $\mathrm{tr}(A) < 0$ y $\det(A) > 0$ entonces el origen es asintóticamente estable.
   (b) Si $\mathrm{tr}(A) = 0$ y $\det(A) > 0$ entonces el origen es Lyapunov estable.
   (c) Si $\mathrm{tr}(A) < 0$ y $\det(A) = 0$ entonces el origen es inestable.

2. Consider la ecuación diferencial $w'' + 2w' + w = 0$.
   (a) Escribe la ecuación como un sistema de ecuaciones $x' = Ax$.
   (b) Calcula explícitamente el flujo asociado al sistema del inciso (a).
   (c) Calcula explícitamente la solución particular $w(t)$ con $w(0) = 0$ y $w'(0) = 1$.

3. Describe el espacio fase y emplea una función de Lyapunov para determinar la estabilidad del origen de la ecuación diferencial
$$x'' + x - x^3 = 0.$$

4. Consider el problema de valor inicial (p.v.i.)
$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \qquad y(0) = y_0. \tag{1}$$
   (a) Enuncia el Teorema de Existencia y Unicidad del problema (1).
   (b) Justifica las hipótesis del teorema que has enunciado proporcionando un p.v.i. donde no se cumpla la existencia y otro p.v.i. donde no se cumpla la unicidad.

5. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 y considera la ecuación diferencial $x' = F(x)$. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto, no vacío, conexo y simplemente conexo que es invariante bajo el flujo de la ecuación. Demuestra que U contiene un punto estacionario de F.