

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Examen General

CIMAT – Agosto 2025

Cada problema correctamente resuelto vale 10 puntos. Se necesitan al menos 35 puntos para aprobar el examen. Justifica claramente tus respuestas.

Ejercicio 1. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones de clase C^1 tales que $f(x, t) < g(x, t)$ para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. Sean además $\varphi, \psi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ soluciones respectivas de las ecuaciones diferenciales

$$x' = f(x, t) \quad \text{y} \quad x' = g(x, t),$$

las cuales verifican además $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$ para cierto $t_0 \in (a, b)$.

- (a) Probar que $\varphi(t) < \psi(t)$ para todo $t \in (t_0, b)$.
- (b) Para $x_0 \in \mathbb{R}$ dado, y cada $\epsilon > 0$, asumimos que la ecuación diferencial

$$x' = g_\epsilon(x, t) = g(x, t) + \epsilon$$

admite una solución $\psi_\epsilon : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica $\psi_\epsilon(t_0) = x_0$. Justificar la siguiente afirmación:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi_\epsilon(t) = \psi(t) \quad \text{para todo } t \in (a, b).$$

Ejercicio 2. Bosquejar las soluciones de la ecuación lineal $\dot{X} = AX$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y estudiar la estabilidad de las mismas.

Ejercicio 3. Dada la ecuación diferencial

$$x'' + \alpha x' + \beta x + \gamma x^2 = 0$$

determinar la estabilidad de la solución estacionaria $x(t) = 0$, para toda $t \in \mathbb{R}$, en función de los parámetros $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 , acotada, y periódica en la segunda variable ($f(x, t+1) = f(x, t)$ para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^2$). Probar que si la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, t)$ admite una solución definida para todo tiempo t y que además es acotada, entonces admite una solución periódica.

Sugerencia: En el espacio fase, considera la transformación de Poincaré definida desde la sección transversal $\{t = 0\}$ a la sección $\{t = 1\}$.

Ejercicio 5. Demostrar que la ecuación diferencial de segundo orden,

$$w'' + (w^2 + 2(w')^2 - 1)w' + w = 0,$$

tiene una solución periódica no trivial en el anillo $\frac{1}{2} < w^2 + (w')^2 < 1$.