Examen general de EDO, agosto del 2023

Aclaración: cada problema resuelto correctamente vale 10 puntos. Se necesitan 35 puntos para aprobar el examen. Justifica todas tus respuestas.

1. Dado $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ de clase C^1 tal que $|f(x)| \leq 1 + |x|^\alpha$ consideramos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Demuestra que si $\alpha \in [0, 1]$ entonces la solución $x = x(t)$ está definida para todo $t \in \mathbf{R}$. Da por otro lado un contraejemplo para el cual $\alpha > 1$ y no sea posible encontrar una solución $x = x(t)$ definida para todo $t \in \mathbf{R}$.

2. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua y

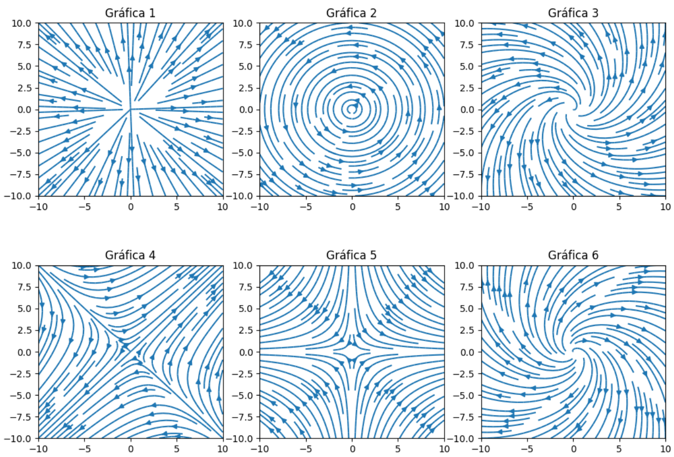
$$u(x) = \int_0^x f(y) \sin(x - y) dy.$$

Calcula la segunda derivada de u y verifica que satisface $u'' + u = f$.

3. Encontrar la solución general del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t - 1 \\ 3t \end{pmatrix}.$$

4. Presenta una expresión para un posible campo vectorial que genere cada uno de los siguientes flujos en el plano. Justifica tu elección en cada caso.



5. Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto no vacío, $F : U \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 y γ una trayectoria periódica aislada del campo F. Demuestra que existe una vecindad $V \subset U$ de γ tal que, para todo punto $p \in V$ se cumple $\alpha(p) = \gamma$ o se cumple $\omega(p) = \gamma$.

Recordatorio :

Sea $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un flujo y $x \in \mathbb{R}^2$ un punto dado, decimos que $y \in \mathbb{R}^2$ es un ω-límite de x si existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} t_n = \infty, \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\longrightarrow\infty} \varphi(t_n, x) = y,$$

el conjunto de todos los ω-límites de x es denotado por $\omega(x)$.

De manera análoga, y es llamado un α-límite de x si existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} t_n = -\infty, \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\longrightarrow\infty} \varphi(t_n, x) = y,$$

el conjunto de todos los α-límites de x es denotado por $\alpha(x)$.