Examen de Admisión al Doctorado en Matemáticas Básicas CIMAT

Junio 2022

Instrucciones

- El examen tiene una duración de 4 horas.
- Cada problema vale 10 puntos.
- Se recomienda leer todos los problemas antes de comenzar a resolverlos.
- Para recibir puntuación es necesario justificar las respuestas.

1. Calcula la integral
$$\int_0^1 \int_y^1 x^{-1/2} \sin\left(\frac{\pi y}{3x}\right) dxdy$$
usando los teoremas de Tonelli y Fubini para justificar cada paso de la evaluación.

2. Considera una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrable. Demuestra que si
$$\int_0^x f(t)dt = 0$$
para cada $x \in [0,1]$, entonces $f \equiv 0$ en Lebesgue casi todo punto de $[0,1]$.

3. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible.
   (a) Proporciona la definición de una medida con signo sobre $(X, \mathcal{A})$.
   (b) Si μ_1 y μ_2 son dos medidas en $(X, \mathcal{A})$ y al menos una de ellas es finita, demuestra que $\mu_1 - \mu_2$ es una medida con signo.
   (c) ¿Es verdad que todas las medidas con signo son la diferencia de dos medidas como en el inciso anterior? Argumenta o proporciona un contraejemplo.

4. ¿Existe alguna matriz A con coeficientes racionales que sea conjugada a la matriz $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$? ¿Y a la matriz $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$? Explica tu respuesta.

5. Considera un espacio vectorial real V de dimensión finita y un endomorfismo lineal $T : V \to V$ tal que $T^4 = 0$ pero $T^3 \neq 0$. Demuestra que existen subespacios vectoriales $V_1, V_2, V_3, V_4 \subset V$ tales que $V = V_4 \oplus V_3 \oplus V_2 \oplus V_1$, $V_j \neq \{0\}$ para todo j y además

$$T(V_4) \subset V_3, \quad T(V_3) \subset V_2, \quad T(V_2) \subset V_1 \quad \text{y} \quad T(V_1) = 0.$$

6. Demuestra que si G es un grupo finito y H es un subgrupo de G; entonces el número de subgrupos distintos de G de la forma xHx^{-1} es igual a $\dfrac{|G|}{|N(H)|}$, donde

$$N(H) = \{g \in G \,|\, g^{-1}Ng \subset N\}.$$

En particular, si H es un p-subgrupo de Sylow de G, entonces el número de p-subgrupos de Sylow de G que son conjugados a H es primo relativo con p.

7. Analiza y discute la existencia y unicidad de la solución para el problema de valor inicial

$$\dot{x} = \ln t + \frac{x}{x^2+1}, \qquad x(1) = 0.$$

Si existe solución, determina el intervalo máximo de definición.

8. Muestra que el punto de equilibrio $(0, 0)$ del sistema

$$\begin{aligned} x' &= y^3, \\ y' &= -2x + h(x,y)y, \end{aligned}$$

es asintóticamente estable (en el sentido de Lyapunov) si $h(x, y) < 0$.

9. Considera la ecuación diferencial lineal

$$x' = Ax, \qquad A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

(a) Demuestra que el conjunto de todas las matrices que inducen un flujo hiperbólico, forman un abierto en $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(b) Si el flujo lineal es hiperbólico y existen órbitas periódicas, demuestra que éstas deben ser triviales.