Examen de Admisión al Doctorado en Matemáticas Básicas, CIMAT

21 junio, 2021

Instrucciones

- El examen tiene una duración de 4 horas.
- Cada problema vale 10 puntos.
- Se recomienda comenzar resolviendo los ejercicios más sencillos.
- Para recibir puntuación es necesario justificar las respuestas.

1. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío convexo y cerrado. Demuestra: existe un único $x \in A$ tal que $\|x\| \leq \|y\|$ para todo $y \in A$.

2. Sea n un entero positivo y G el conjunto de las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de la forma $f(x) = Ax + b$, donde A es una matrix $n \times n$ con determinante no nulo y $b \in \mathbb{R}^n$. El producto de dos elementos de G se define mediante la composición de funciones.

   a) Demuestra: G es un grupo no abeliano.

   b) Demuestra: $H := \{f \in G | f(0) = 0\}$ y $N := \{f \in G | f(x) = x + b,\ b \in \mathbb{R}^n\}$ son subgrupos de G, N es un subgrupo normal y H no es normal.

3. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ soluciones a la ecuación $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$, con $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas. Suponemos que ambas soluciones satisfacen la misma condición: ya sea $x(0) = 0$ o $\dot{x}(0) = 0$. Demuestra que las soluciones x_1 y x_2 son linealmente dependientes.

4. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible (segun Lesbegue) de medida $m(A)$. Demuestra: para todo $a \in [0, m(A)]$ existe un conjunto medible $B \subset A$ tal que $m(B) = a$.

5. Demuestra que el punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ de la ecuación del oscilador armónico $\ddot{x} + \omega x = 0$, con $\omega > 0$, es (Lyapunov) estable.

6. Demuestra: si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^3(\mathbb{R}^n)$ entonces $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

   Nota: $L^k(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de las funciones Lesbegue-medibles $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $|f|^k$ es Lesbegue-integrable.

7. Cierto o falso. En caso de "falso" hay que dar un contra ejemplo. En caso de "cierto" basta dar una explicación breve de 1-2 frases (no se requiere una demostración completa).

   Nota: $Mat_n(k)$ denota las matrices $n \times n$ con coeficientes en un campo k.

   a) Toda matriz $A \in Mat_n(\mathbb{C})$ es diagonalizable.

   b) Sean $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$, tal que la única solución del sistema de ecuaciones $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$ es $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Entonces para todo $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ el sistema $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, tiene una solución.

   c) Si todos los valores propios de $A \in Mat_n(\mathbb{C})$ se anulan entonces $A = 0$.

   d) Sean $A, B \in Mat_n(\mathbb{C})$. Si $AB = I$ entonces $BA = I$.
   Nota: $I \in Mat_n(\mathbb{C})$ es la matriz identidad.

   e) Toda $A \in Mat_5(\mathbb{R})$ tiene un valor propio real.

8. Sea G un grupo de orden 35.

   a) Demuestra que G tiene exactamente un grupo de orden 5 y un grupo de orden 7.

   b) Demuestra que G es cíclico.

9. Sea $x(t)$ una solución de $\dot{x} = -\nabla\Phi(x)$, definida para $0 \leq t \leq t_0$, donde $t_0 > 0$ y $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 (dos veces continuamente diferenciable). Supongamos también que $\Phi^{-1}(-\infty, c]$ es un conjunto compacto para cada $c \in \mathbb{R}$ y que $\nabla\Phi(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ excepto en un conjunto finito de puntos $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$.

   Demuestra:

   a) $x(t)$ se extiende a una solución definida para todo $t \geq 0$.

   b) La extensión satisface: $\lim_{t \to +\infty} x(t)$ existe y es igual a uno de los puntos en P.