Examen de Admisión
Doctorado en Matemáticas Básicas
CIMAT

Diciembre 2022

Instrucciones

- El examen tiene una duración de 4 horas.
- Cada problema vale 10 puntos.
- Se recomienda comenzar resolviendo los ejercicios mas sencillos.
- Para recibir puntuación es necesario justificar las respuestas.

1. Demuestra que todo grupo de orden 15 es abeliano.

2. Si A es una matriz de coeficientes reales, prueba que la forma canónica racional de A es la misma sobre $\mathbb{R}$ que sobre $\mathbb{C}$.

3. Sea T un operador lineal actuando sobre un espacio vectorial V de dimensión finita. Demuestra que existe un vector no nulo $v \in V$ tal que para todo polinomio $f \in \mathbb{R}[x]$, se cumple $f(T)(v) = 0$ si y sólo si $f(T) \equiv 0$.

4. Sea $E \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto medible, de medida $m(E)$. Si $b \in [0, m(E)]$ probar que existe un conjunto medible $B \subset E$ tal que $m(B) = b$.

5.
   a) Proporciona un ejemplo de una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un conjunto cerrado $E \subset \mathbb{R}$ tal que $f(E)$ no es un conjunto cerrado.

   b) Si $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un polinomio y $E \subset \mathbb{R}$ es cualquier conjunto cerrado, prueba que $P(E)$ es un conjunto cerrado.

6. Prueba que la función $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}, x > 1$, es continua.

7. Muestra que el punto de equilibrio $(0, 0)$ del sistema

$$\begin{aligned} x' &= y^3, \\ y' &= -2x + h(x, y)y, \end{aligned}$$

es asintóticamente estable (en el sentido de Lyapunov) si $h(x, y) < 0$.

8. *a*) Demuestra que $y_1(t) = \sqrt{t}$ y $y_2(t) = 1/t$ son soluciones de la ecuación diferencial de Euler-Cauchy

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0,$$

en el intervalo $0 < t < \infty$.

b) Usa el inciso anterior para resolver el problema de valor inicial

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0; \qquad y(1) = 2, y'(1) = 1.$$

9. Considera la ecuación diferencial lineal

$$x' = Ax, \qquad A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

a) Describe las condiciones sobre A para que el flujo lineal sea hiperbólico.

b) Si el flujo lineal es hiperbólico y existen órbitas periódicas, demuestra que éstas se reducen a puntos de equilibrio.