Examen de Admisión al Doctorado en Matemáticas Básicas, CIMAT

8 de diciembre de 2023

Instrucciones

- El examen tiene una duración de 4 horas.
- Cada problema vale 10 puntos.
- Se recomienda comenzar resolviendo los ejercicios más sencillos.
- Para recibir puntuación es necesario justificar las respuestas.

1. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   Entontrar un polinomio P con coeficientes reales de grado 3 tal que $P(A) = 0$. Probar que no existe un polinomio Q, con coeficientes reales, de grado 2 tal que $Q(A) = 0$.

2. Probar que dos grupos de orden 65 son isomorfos.

3. Probar que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1-x^2)^n dx = 0$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y

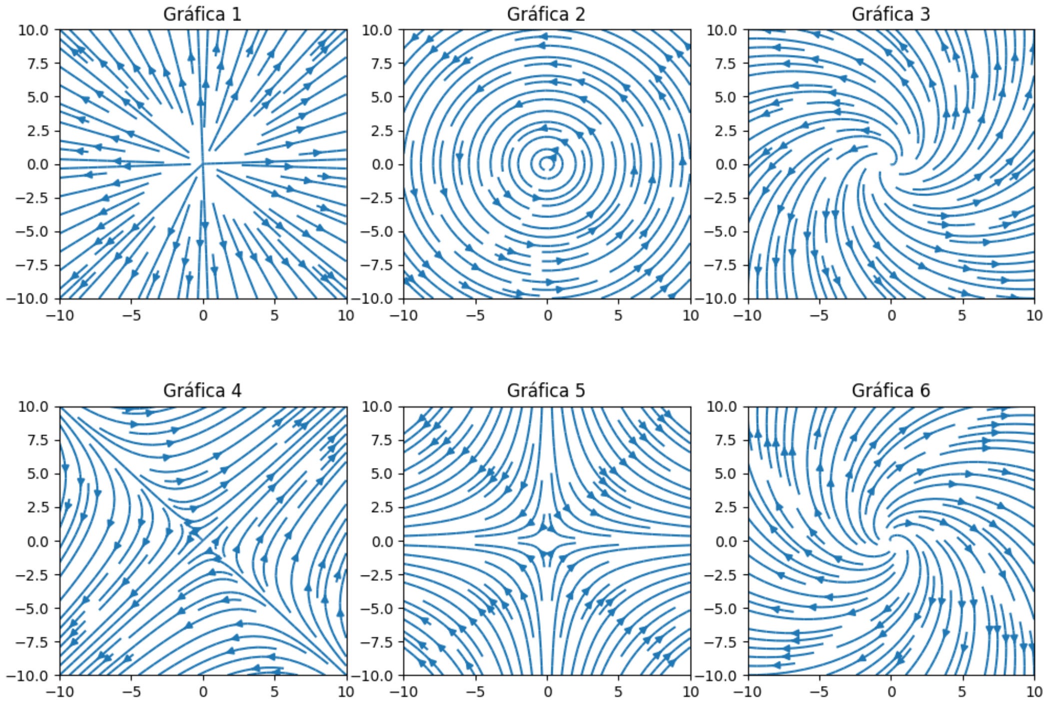
$$u(x) = \int_0^x f(y) \sin(x-y) dy.$$

   Calcula las dos primeras derivadas de u y verifica que estas satisfacen $u'' + u = f$.

5. Dado un conjunto (Lebesgue) medible $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, el cono con base en Ω es el conjunto $C := \{(1-t)(x, y, 0) + t(0, 0, 1) \,:\, (x, y) \in \Omega, 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$. Prueba que el cono C es medible y calcula su medida $m(C)$ en términos de $m(\Omega)$.

6. Sea A una matriz real $n \times n$ tal que la matriz A^2 es definida negativa (es decir que para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ se tiene que $\langle A^2 x, x\rangle < 0$. Probar que n es par.

7. Presenta una expresión para un posible campo vectorial que genere cada uno de los siguientes flujos en el plano. Justifica tu elección en cada caso.



8. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos por $V(n)$ la medida de la bola $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ (el conjunto de vectores de norma menor o igual que 1).

   a. Calcular $V(2)$ y $V(3)$.

   b. Probar que $V(n+2) = \frac{2\pi}{n+2} V(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

9. Dado $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $|f(x)| \leq 1 + |x|^\alpha$ consideramos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

   Demuestra que si $\alpha \in [0, 1]$ entonces la solución $x = x(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Da por otro lado un contraejemplo para el cual $\alpha > 1$ y no sea posible encontrar una solución $x = x(t)$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$.