Examen de Admisión al Doctorado en Matemáticas Básicas, CIMAT

12 de junio de 2024

Instrucciones

- El examen tiene una duración de 4 horas.
- Cada problema vale 10 puntos.
- Se recomienda comenzar resolviendo los ejercicios más sencillos.
- Para recibir puntuación es necesario justificar las respuestas.

1. Calcula los autovalores de la matriz $B = A^{100} + A$ donde
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$
2. Sea G un grupo con exactamente 28 elementos de orden 5. Determina cuántos subgrupos distintos de orden 5 hay en G.
3. Considera la función $\varphi\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ tal que $\varphi(a,b) = (a+2b, b-a)$. Encuentra el orden del grupo $\operatorname{Coker}(\varphi) := \mathbb{Z}^2/\operatorname{Img}(\varphi)$
4. Dado $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sea $f(t) = \det(I + At)$. Demuestra que $f'(0) = \operatorname{tr} A$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable. Demuestra que f no puede ser inyectiva.

   Pista: Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, entonces considera la función $g(x, y) = (f(x, y), y)$ en un entorno de (x_0, y_0).

6. Sea $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones diferenciables que convergen uniformemente a una función f.

   (a) Demuestra que si la sucesión de las derivadas f_n' convergen uniformemente a una función g, entonces f es diferenciable y $f' = g$.

   (b) Demuestra que f no es necesariamente diferenciable si reemplazamos la convergencia uniforme por convergencia en L^1, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n - g| = 0.$$

7. Calcula la solución del problema de valores iniciales

$$x'' = x + 2y, \qquad y'' = 2x + y, \qquad x(0) = 1, \qquad y(0) = x'(0) = y'(0) = 0.$$

8. Considera el siguiente sistema en el primer cuadrante

$$x' = y(y - x) + 2, \qquad y' = x(x - 3y) + 4.$$

   Describe el espacio de fase indicando: Curvas nulclínicas[1] y el campo sobre estas, puntos fijos, su correspondiente linearización y tipo de estabilidad.

9. Considera el sistema de ecuaciones en el plano

$$x' = y^2, \qquad y' = x^2.$$

   (a) Demuestra que existe por lo menos una condición inicial para la cual la solución no puede estar definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Demuestra que para toda condición inicial, la solución no está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

[1] Las curvas nulclínicas son aquellas donde el campo vectorial es horizontal o vertical