

CIMAT

Examen General de Variable Compleja
Agosto 2021

Cada problema correctamente resuelto vale 10 puntos. Se necesitan 45 puntos para aprobar el examen. Justifica todas tus respuestas.

Notación: $D(z_0; r) = \{z : |z - z_0| < r\}$.

1. Sean $p(z)$, $q(z)$ polinomios en $\mathbb{C}$ y donde el conjunto de raíces de p es disjunto del conjunto de raíces de q .

- (a) Considera la función meromorfa $R(z) = p(z)/q(z)$. Demuestra que R tiene una única extensión continua $R : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ y ésta es holomorfa.
- (b) Demuestra que toda función holomorfa $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es de la forma descrita en el inciso (a).

2. Define los conjuntos $B = \{z : |z| > 1\}$ y $\overline{B} = \{z : |z| \geq 1\}$. Considera una función holomorfa $f(z)$ sobre un abierto U que contiene a $\overline{B}$ y que satisface $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 1$. Demuestra que para toda $z \in B$,

$$\int_{|w|=1} \frac{f(w)}{(w-z)} dw = 2\pi i(1 - f(z)).$$

3. Sea $f : D(0; R) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Demuestra que $g(r) = \sup_{|z|=r} \operatorname{Re}(f(z))$, donde $0 < r < R$ es una función monótona y estrictamente creciente al menos que f sea constante.

4. ¿Es posible encontrar una función holomorfa $f : D(0; 1) \rightarrow D(0; 1)$ tal que $f(1/2) = 4/5$ y $f'(1/2) = 2/3$?

5. Construir una función meromorfa f en $\mathbb{C}$ tal que su conjunto de polos sea $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$, y tenga un polo simple en cada uno de estos puntos.